Јасмина Јекнић-Дугић Момир Арсенијевић Мирољуб Дугић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

ИЗ ОСНОВА ОТВОРЕНИХ КВАНТНИХ СИСТЕМА

ПРЕДГОВОР

Теорија отворених квантних система је нова теоријска и методска основа квантне физике, како нерелативистичке, тако и неких области релативистичке квантне физике, од најширег интереса у применама у атомској и молекулској физици, фотоници и квантној оптици, физици кондензоване материје и физици материјала, квантне теорије поља и космологије до технологија у развоју, као што су нанотехнологија и квантна технологија.

Историјски, ова нова, темељна („фундаментална“) физичка наука развијала се на многим местима, посебно у оквирима математичке физике и у применама, као што је квантна оптика (посебно: теорија ласера), физика кондензоване материје (многочестични системи), физика атома и молекула. Уочавање и изучавање заједничких физичких и методских основа је резултат релативно новијих истраживања, видети референце у [2,4]. Теорија отворених квантних система је *практична потреба* технологија у развоју, као што су нанотехнологија, фотоника, наука о материјалима, квантна информатика и квантно рачунање. Додатни развој ове области био је део истраживања у неким интерпретацијским оквирима и њиховим формализмима, и у многоме има свој извор у фон Нојмановој квантној теорији мерења, на којој се заснива формализам, тзв., „квантних операција“ (који обухвата и „уопштена квантна мерења“) [1]. Отуда незамењиво место ове теорије и у интерпретацијама квантне механике и на њој засноване космологије. Кратко речено, попут квантне механике пре близу 100 година, теорија отворених квантних система сакупља и уређује, појмовно и методски, знање (теоријско, експериментално и примењено) да би понудила нову основу квантне физике која у потпуности обухвата претходну квантну теорију познату као „квантна механика“.

У овој збирци решених задатака избор је пао на основне појмове и њихова објашњења, са нагласком на њихове вишеструке везе. У теоријском уводу су дати само неки основни појмови (иако и то може изгледати обимно), сачувавајући неке теоријске чињенице и резултате за део са задацима; у том смислу, од значаја су бројне напомене дате после решења задатака. Надамо се да ће ова збирка допринети развоју области и њеној примени и на студијама физике и њеним применама у Србији.

Ниш, Крагујевац 2020. Аутори

САДРЖАЈ

РЕЧНИК И ОЗНАКЕ

Динамичко пресликавање – *Dynamical map*
Декохеренција – *Decoherence*
(потпуна) позитивност – (*complete*) *positivity*
Растављивост – *Divisibility*
Марковљевост – *Markovianity*
Двонивоски/тронивоски систем – *Two-level/three-level system*
Дводелна структура – *Bipartite structure*
Кохеренција – *Coherence*
Сплетеност – *Entanglement*
Корелације – *Correlations*
Статистички оператор („матрица густине“) – *Statistical operator* (“*density matrix*”)
Квантни дискорд – *Quantum discord*
Ентропија – *Entropy*
Репрезентација - *Representation*
Шредингерова/интеракциона слика – *Schrodinger/interaction picture*
RWA - Rotating Wave Approximation
Кубит (квантни бит) – *Qubit* (*quantum bit*)
ОНБ (ортонормирани базис) – *ONB* (*orthonormalized basis*)
Рекуренција – *Recurrence*
Полугрупа - *Semigroup*

$\mathbb{B}, \mathbb{H}$ - Банахов, Хилбертов простор
$|\quad\rangle, \langle\quad|$ - Диракови кет, и бра вектори
$\mathcal{L}$ - лиувилијан (Лиувилов суперoператор)
$\mathcal{D}$ - дисипатор (дисипаторски суперoператор)
$\mathcal{T}$ – ознака временског уређења
$h \equiv \frac{\hbar}{2\pi}$, $\hbar$-Планкова константа
$\|\mathrm{A}\|_1 \overset{\mathrm{def}}{=} +tr\sqrt{A^+A}$
$\delta(t-s), \theta(t-s)$ – Диракова, Хевисајдова тета („степ“) функција
$[A, B] \equiv AB - BA$ – комутатор
$\{A, B\} \equiv AB + BA$ – антикомутатор
$\vec{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \equiv (X, Y, Z)$ – Паулијев оператор (и матрице)
$\otimes$ - ознака тензорског производа (подпростора, или вектора)
$\oplus$ - ознака ортогоналног збира (подпростора, или вектора)

УВОД

Нагласак ове збирке задатака лежи на општим методским основама теорије отворених квантних система, са жељом да се основни појмови осветле из више углова, како садржајно, тако и са становишта математичких метода. У том духу одабран је приступ линеарних динамичких пресликавања и њима одговарајући интегрални (са нагласком на Краусов), као и диференцијални облик (мастер једначине). Методи стохастичких Шредингерових једначина као и нелинеарна пресликавања остају практично непокривени у овом издању збирке. Садржај збирке је кратко представљен у теоријском уводу који је можда дужи него што је неопходно, али тако се ауторима чинило пожељним. Иако је учињен напор да збирка буде што сажетија, испоставља се да је неизбежан пресек са неким појмовима квантне теорије информације. У вези са тим дат је само кратак додатак на крају теоријског увода, како би се збирка могла користити као самодовољан извор. Наша је жеља да збирка буде коришћена и у савладавању теоријских основа области отворених квантних система.

Од читалаца се очекује да довољно добро познају основе стандардне, репрезентационо-независне, квантне механике, као и одговарајуће математичке основе, зашта је (на српском језику) незамењив извор, и стандард, књига Федора Хербута [7]; на енглеском језику књига Нилсена и Чуанга, поглавље 2 [3]. Како верујемо да израду задатака у физици није могуће радити без упознавања са теоријским основама, списак корисних књига (од којих су неке заправо уџбеници за област) наведен је на крају теоријског увода. Остале коришћене референце су дате у фуснотама уз одговарајуће задатке. Тиме се желело указати, не само на изворе и поједине детаље који се тамо могу наћи, већ једнако на нека отворена истраживачка питања и проблеме.

Посебна пажња посвећена је следећим физичким моделима: спин-бозон моделу (у различитим варијантама дво(тро)нивоског модела, нпр., унутрашњих степена слободе атома (најшире коришћених у квантној оптици), квантним операцијама на кубиту (квантном биту)), моделу пригушеног квантног осцилатора, квантном Брауновом кретању (тј., квантној дисипацији). Од основних појмова, посебна пажња је посвећена основним и општим особинама динамичких пресликавања („мапа“): позитивност, потпуна позитивност, растављивост и Марковљевост, како у интегралном, тако и у диференцијалном облику. Различити поступци за утврђивање, или проверу, ових особина динамичких пресликавања дати су што је могуће краће – избегавајући понављања истог садржаја, осим на местима на којима се користе различити методи, или, пак, понављања могу бити добродошла читаоцима заинтересованим, пре свега, за примену теорије.

Уводни задаци су одабрани и поређани тако да корак по корак уводе саму срж квантне физике: квантну кохеренцију (и квантне корелације) наспрам одсуства квантне кохеренције и отуда класично сличних модела и динамике. То су уједно и основне поуке квантне теорије мерења из које је, добрим делом, област отворених квантних система и произашла у данас познатом и овде представљеном облику. У извесном смислу, однос квантног и класичног је у корену читаве области, и свакако у основи свих „квантних забуна“ које тумачење квантне теорије чине тако сложеним послом. Остала поглавља прате општу логику и дата су у садржају збирке.

ТЕОРИЈСКИ УВОД

Дефиниција 1. Под *физичком динамиком* се подразумева уређени низ пресликавања физичких стања:

$$\ldots \to \mathfrak{s}_i \to \mathfrak{s}_{i+1} \to \mathfrak{s}_{i+2} \to \cdots \mathfrak{s}_j \to \mathfrak{s}_{j+1} \to \mathfrak{s}_{j+2} \to \cdots$$

Ако се сваком стању $\mathfrak{s}_i$ може придружити једнозначан тренутак времена, онда се то пише $\mathfrak{s}_i(t_i) \equiv \mathfrak{s}(t_i)$.

Формализам, тзв., „квантних операција“ [1] је најопштији формализам описа динамике квантних система. Тиче се пресликавања једног стања у друго, где су стања одабрана, или очекивана, или пак феноменолошки моделована без промене („еволуције“) у времену. Парадигматични пример, од којег је „све и кренуло“, је процес предиктивног мерења који је *постулиран* (Лидерс-фон Нојман) неунитарним пресликавањем стања ансамбла у почетном тренутку, што у неселективној варијанти има облик:

$$\rho \to \sum_n P_n \, \rho P_n,$$

где међусобно ортогонални пројектори P_n представљају својствене пројекторе мерене опсервабле. Одавде је само један корак до увођења уопштених квантних мерења [3], као и до формализма квантних логичких кола (капија) у квантној информатици и квантном рачунању [3].

Најопштији запис физичке динамике („еволуције“) *у времену* је, тзв., *интегралног* облика преко ознаке за динамичко пресликавање („динамичку мапу“), означену са $\mathcal{G}(t_i, t_j) \equiv \mathcal{G}_{(t_i,t_j)}$:

$$\mathcal{G}(t_i, t_j)[\mathfrak{s}(t_j)] = \mathfrak{s}(t_i), \tag{1}$$

уз уобичајену претпоставку „протицања времена“, тј., да важи $t_j < t_i$. Непрекидност динамике у времену се још наглашава неједнакошћу: $t_j \leq t_i$.

Динамичко пресликавање:

- Не мора бити линеаран оператор на простору стања,
- Не мора бити растављиво,
- Ако је растављиво, не мора математички бити „глатко“,
- Не мора важити $\mathcal{G}(t_i, t_i) = \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ представља „идентично, тј., јединично“ пресликавање које не мења ни једно стање),
- Не мора бити диференцијабилно ни за један тренутак времена,
- Не мора постојати инверзно пресликавање, $\mathcal{G}^{-1}(t_i, t_i)$, које задовољава $\mathcal{G}(t_i, t_i)\mathcal{G}^{-1}(t_i, t_i) = \mathcal{I}$. А ако постоји, не мора важити $\mathcal{G}^{-1}(t_i, t_i)\mathcal{G}(t_i, t_i) = \mathcal{I}$.

Дефиниција 2. Ако се физичка динамика на једном интервалу времена може раставити на подинтервале, онда се за пресликавање каже да је *растављиво*:

$$\mathcal{G}(t_i, t_j) = \mathcal{V}(t_i, t_l)\mathcal{G}(t_l, t_j), \tag{2}$$

где важи распоред временских тренутака, $t_i > t_l > t_j$, што се за непрекидну динамику у времену пише (и надаље ћемо то претпостављати): $t_i \geq t_l \geq t_j$.

Ознака $\mathcal{V}$ у (2) истиче да може бити реч о другачијем динамичком пресликавању од оног означеног са „$\mathcal{G}$“; обично се претпоставља да за почетни тренутак, t_j, динамика је иста за сваки коначан тренутак $t_i, t_l, \ldots$

Дефиниција 3. За динамичко пресликавање се каже да је *глатко*, ако је, за мало $\varepsilon \to 0$, добро дефинисано пресликавање $\mathcal{G}\left(t_i + \varepsilon, t_j\right), \forall t_i \geq t_j$.

Овде би ваљало напоменути да је „глаткост“ динамике потребан, али не нужно и довољан услов да постоји извод пресликавања по времену.

Дефиниција 4. *Извод* динамичког пресликавања по „коначном тренутку“ t_i дефинисано је следећим лимесом:

$$\frac{d\mathcal{G}\left(t_i,t_j\right)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{G}\left(t_i+\varepsilon,t_j\right) - \mathcal{G}\left(t_i,t_j\right)}{\varepsilon}. \qquad (3)$$

Ако је лимес са десне стране (3) добро деинјисан, тада се за динамичко пресликавање $\mathcal{G}\left(t_i, t_j\right)$ каже да је *диференцијабилно*.

Ако је пресликавање растављиво, тј., може се писати (поједностављење претпоставке растављивости из израза (2)) $\mathcal{G}\left(t_i + \varepsilon, t_j\right) = \mathcal{G}(t_i + \varepsilon, t_i)\mathcal{G}\left(t_i, t_j\right)$, онда израз (3) добија облик:

$$\frac{d\mathcal{G}\left(t_i,t_j\right)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{G}(t_i+\varepsilon,t_i)\mathcal{G}\left(t_i,t_j\right) - \mathcal{G}\left(t_i,t_j\right)}{\varepsilon},$$

што под условом:

$$\mathcal{G}(t_i, t_i) = \mathcal{I}, \forall i \tag{4}$$

поприма вид [2]:

$$\frac{d\mathcal{G}(t_i, t_j)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{G}(t_i+\varepsilon, t_i) - \mathcal{I}}{\varepsilon} \mathcal{G}(t_i, t_j) \equiv \mathcal{L}_{t_i} \mathcal{G}(t_i, t_j). \tag{5}$$

Израз (4) је потребан услов за диференцијабилност пресликавања.

Дефиниција 5. Динамичко пресликавање за које важи израз (5) се назива *локалним у времену*, јер *„генератор“* пресликавања, $\mathcal{L}_{t_i}$, не зависи од претходних тренутака, већ само од тренутка t_i.

Дефиниција 6. Под *позитивно-семидефинитним* оператором над Хилбертовим простором стања, $\mathbb{H}$, квантног система се подразумева ермитски оператор A за који важе следећи, међусобно еквивалентни, услови: (а) $\langle\varphi|A|\varphi\rangle \geq 0, \forall|\varphi\rangle \in \mathbb{H}$, и (б) својствене вредности оператора A су реални, ненегативни бројеви. Ако се у скупу својствених вредности не налази број 0, онда се такав оператор назива *позитивно-дефинитним* (краће: *позитивним*) оператором.

Наш главни интерес надаље тицаће се, готово искључиво, ***линеарних*** оператора; све што буде речено тицаће се коначнодимензионалних простора стања, и отуда ***ограничених*** оператора на њима. За бесконачнодимензионалне случајеве се све то мора додатно дефинисати и проверавати, што овде неће бити представљено.

Дефиниција 7. Под *статистичким оператором* (*„матрицом густине“*), ρ, се подразумева оператор на Хилбертовом простору стања квантног система који је: (а) ермитски, (б) позитивно-семидефинитан (или позитиван), и (в) трага један, тј., $tr(\rho) = 1$.

Дефиниција 8. Под *условом конвексности* се подразмева да, ако сваки оператор ρ_i представља статистички оператор, онда и „конвексни збир“:

$$\rho = \sum_i p_i \, \rho_i, 0 \leq p_i \leq 1, \sum_i p_1 = 1, \qquad (6)$$

представља статистички оператор.

Скуп статистичких оператора који чине „конвексну структуру“ је, математички, Банахов (векторски) простор, $\mathbb{B}^+$; знак „плус“ у горњем индексу означава да се ради о позитивно-(семи)дефинитним операторима.

Дефиниција 9. За свако пресликавање $\mathcal{f}: \mathbb{B}^+ \to \mathbb{B}^+$ које преводи позитивно-(семи)дефинитни оператор у други позитивно-(семи)дефинитни оператор, каже се да је *позитивно*.

Претпостављајући да је динамика квантног система непрекидна и глатка у времену на целој временској реалној оси, и задовољава (4), омогућује интегрални вид закона кретања који има те исте особине:

$$\rho(t) = \mathcal{G}(t, t_0)[\rho(t_0)], \qquad (7)$$

где се t_0 назива почетним тренутком.

Ако је динамичко пресликавање у изразу (7) диференцијабилно, онда сигурно постоји диференцијални вид закона кретања [2]:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}[\rho(t_0)]. \qquad (8)$$

Дефиниција 10. Диференцијалне једначине по статистичком оператору, једначина (8), називају се *мастер једначинама*.

Ако је динамички оператор линеаран оператор, такав је и његов извод по времену, па се такве једначине, изрази (7) и (8), називају линеарним.

Ако је динамичко пресликавање локално у времену, тада мастер једначина (8) добија облик:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}_t[\rho(t)], \tag{9}$$

где се подразумева (7), па отуда за генератор пресликавања важи [2]:

$$\mathcal{L}_t = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\mathcal{G}^{-1}(t,t_0). \tag{10}$$

Дефиниција 11. За мастер једначину (9) се каже да је *локална у времену*.

Генератор пресликавања, $\mathcal{L}_t$, се назива *лиувилијаном*.

Дефиниција 12. Ако је дозвољено проширење Банаховог простора стања система S, $\mathbb{B}_S^+$, тензорским множењем са Банаховим простором било ког другог система A, $\mathbb{B}_A^+$, макар формално (тј., макар математички, чак ако другог система физички и нема), $\mathbb{B}_S^+ \otimes \mathbb{B}_A^+$, онда се за динамичку мапу система од интереса, S, чије проширење, $\mathcal{G}_S(t,t_0) \otimes \mathcal{I}_A$, представља *позитивно* пресликавање, каже да има особину *потпуне позитивности*. [2]

Не може се пренагласити: позитивна динамичка пресликавања $\mathcal{G}_S(t,t_0)$ преводе статистичке операторе у друге статистичке операторе система од интереса. А ако проширење динамичке мапе, $\mathcal{G}_S(t,t_0) \otimes \mathcal{I}_A$, има особину позитивности (над тим новим простором стања, $\mathbb{B}_S^+ \otimes \mathbb{B}_A^+$), онда се за динамичко пресликавање

$\mathcal{G}_S(t, t_0)$ каже да има, поред особине позитивности, и особину *потпуне позитивности* (ПП). При томе, могуће физичко значење и димензионалност $\mathbb{B}_A^+$ нису од значаја. Потпуна позитивност имплицира позитивност, али обрнуто не важи: постоје позитивна пресликавања која немају особину потпуне позитивности.

У квантној физици и њеним применама, од интереса су *линеарна*, *диференцијабилна*, *растављива*, *позитивна* и по могућности *инвертибилна* и *локална у времену* динамичка пресликавања. То је немали број ***претпоставки о физичким законима***. Томе би требало придружити и *уврежену претпоставку* (заправо, предрасуду) да *свака физички релевантна динамика мора имати и особину потпуне позитивности*. Одступања од ових претпоставки *су отворена питања* заснивања теорије отворених квантних система.

Дефиниција 14. За систем изван којег нема ничега каже се да је изолован, тј., назива се *изолованим* квантним системом.

Дефиниција 15. Квантни систем који има окружења (те није изолован) и чија се интеракција са *свим* подсистемима у његовом окружењу своди на *спољашње поље* (тј., на спољашња поља) које може бити зависно од времена, назива се *затвореним*. Ако то спољашње поље (тј., поља) не зависи експлицитно од времена, онда се за такав систем каже да је и *конзервативан*.

Из дефиниција 14 и 15 одмах следи: изоловани систем је такође затворен (спољашње поље је једнако нули) и конзервативан (како нема поља, нема ни временске зависности).

По постулату о закону кретања у квантној механици, и изоловани и затворени системи су унитарне динамике:

$$\mathbb{U}(t,t_0)[\rho(t_0)] = U(t,t_0)\rho(t_0)U^+(t,t_0), \tag{11}$$

где t_0 означава почетни, а t „коначни“ тренутак времена.

Дефиниција 16. Унитарна динамика (11) се назива *Шредингеровим законом*.

Диференцијални облик закона кретања (11) познат је под називом Шредингерова једначина, за „чиста“, тј., Лиувил-фон Нојманова једначина, за статистичке операторе („мешана“) стања. Генератор унитарне динамике је хамилтонијан система. Ако спољашња поља за систем не зависе експлицитно од времена, тада ни хамилтонијан, H, не зависи експлицитно од времена, па је систем, сходно Дефиницији 15, конзервативан; тада је унитарни оператор облика $U(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$. За временски зависна поља, тј., хамилтонијан, веза унитарног оператора и хамилтонијана дата је, тзв., Дајсоновим редом [2,7].

Дефиниција 17. Квантни систем чија динамика се не може описати, нити свести, на Шредингеров закон, израз (11), назива се *отвореним*.

Дефиниција 18. Под *нетривијалним интеракцијама* система са његовим окружењем подразумевамо интеракције које се *не могу свести на спољашње поље*, које је адитивни део хамилтонијана система.

Формално: нетривијалне интеракције су „двочестични оператори“ који делују на стања, и система од интереса, и на стања система са којима интерагује — тј., (делова) окружења. На пример, интеракција двају система a и b, $V_{ab} = A_a \otimes B_b$, мења стање, и система a, и система b. Са друге стране, „спољашње поље“ је „једночестични“ оператор који мења стање само система од интереса и ничега друго, и додаје се другим члановима хамилтонијана тог система (зато се каже да је спољашње поље адитивни део хамилтонијана система); тада се уместо горњег V_{ab} појављује, нпр., $V_{ab} = V_a \otimes I_b$ (I_b је „јединични“ оператор за систем b) што је спољашње поље за систем a.

Физички, отвореност квантног система је последица нетривијалне интеракције са другим физичким системима. Нетривијална интеракција води забрани унитарне динамике која је дефинисана изразом (11).

Дефиниција 19. Динамика система (S) који нетривијално интерагује са својим окружењем (E) којег, у начелу, чине сви остали подсистеми *изоловане целине* $S + E$, се описује *интегралним* изразом:

$$\rho_S(t) = tr_E(\mathbb{U}(t,t_0)[\rho_{SE}(t_0)]) = tr_E\big(U(t,t_0)\rho_{SE}(t_0)U^+(t,t_0)\big). \quad (12)$$

Сходно постулату о закону кретања квантне механике, важи:

$$U(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)/h},$$

где је H хамилтонијан изоловане целине $S + E$. Диференцијални вид закона кретања (12) гласи:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = tr_E\left(\frac{d\mathbb{U}(t,t_0)}{dt}[\rho(t_0)]\right) = tr_E\left(\frac{d}{dt}\big(U(t,t_0)\rho(t_0)U^+(t,t_0)\big)\right), (13)$$

уз напомену да извод по времену комутира са операцијом парцијалног трага, tr_E.

Утврђивање особина динамике отворених система које су наведене у оквиру изнад је отворено поље истраживања – дефинисање хамилтонијана изоловане целине $S+E$ и примена (13) називају се „микроскопским моделима“ [2,4].

Утврђивање потпуне позитивности динамике система се може обавити, макар, на следећа три (не нужно еквивалентна) начина: (1) Применом критеријума (изоморфизма) Чоија-Јамиолковског [5], (2) За коначнодимензионалне системе коришћењем, тзв., „динамичке матрице“ [5], и (3) провером контрактивности пресликавања (в. Дефиницију 26).

Дефиниција 20. Ако је (линеарно) динамичко пресликавање растављиво *и* за сваки пар тренутака потпуно позитивно, онда се такво пресликавање (тј., динамика система) назива *Марковљевим*. [2]

Формалније: ако важи да је динамичко пресликавање $\mathcal{G}(t,t_0)$ *растављиво*, и да је $\mathcal{G}(t_i,t_j)$ *потпуно позитивно* за *сваки пар тренутака,* $t_i,t_j \in [t,t_0]$, онда се за $\mathcal{G}(t,t_0)$ каже да је Марковљево (има особину Марковљевости).

Познато је да је генератор Марковљеве динамике у Шредингеровој слици општег облика [2]:

$$\frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}[\rho(0)] \equiv \mathcal{L}_t[\rho(t)] = -\frac{i}{h}\left[H_S + H_S^{(shift)}, \rho(t)\right] + \sum_i \gamma_i(t)\left[L_i(t)\rho(t)L_i^{\dagger}(t) - \frac{1}{2}\left(L_i^{\dagger}(t)L_i(t)\rho(t) + \rho(t)L_i^{\dagger}(t)L_i(t)\right)\right]. \quad (14)$$

Скаларне функције $\gamma_i(t) \geq 0, \forall t$, се називају *функцијама (факторима) пригушења*, док се оператори $L_i(t)$ називају *Линдбладовим операторима*. У интеракционој слици, ако се занемари „ $shift$“ члан у хамилтонијану (члан $H_S^{(shift)}$ који обухвата Лембов и Штарков „померај“), из (14) нестаје комутатор и преостаје збир који се назива „дисипатором“. У једном делу литературе се под Марковљевом динамиком (процесима) подразумевају, тзв., хомогени Марковљеви процеси (динамичке *полугрупе*), за које фактори пригушења и Линдбладови оператори у (14) нису функције времена [4].

Марковљева динамика има и горњу, и доњу временску границу важења, тј., не важи за произвољно кратке, и за произвољно дуге временске интервале. Постојање доње границе се некада назива Борновом апроксимацијом (иако их има више под истим називом [4]) и понекад се физички тумачи као време које је потребно окружењу да „заборави“ на своју претходну динамику, тј., на своју „историју“ [2,4,5]. Горња граница важења тиче се неизбежне рекуренције унитарне динамике целине. То јест, унитарна динамика нужно, за дугачки временски интервал, преводи унитарни оператор у јединични те почетно стање целине $S + E$ бива поново успостављено – „рекуренција почетног стања“. Тако се истовремено успоставља и почетно стање за отворени систем.

Наравно, за изолован, као и за затворен, систем нема нетривијалне интеракције и све функције пригушења су једнаке нули, тј., дисипатор је идентички једнак нули.

Дефиниција 21. Под *стационарним стањем* (СС) отвореног система се подразумева статистички оператор који испуњава три, међусобно еквивалентна, услова: (а) $\mathcal{G}_S(t,t_0)[\rho_{ss}] = \rho_{ss}$, (б) ${d\rho_{ss}}/_{dt} = 0$, (в) $\mathcal{L}_t[\rho_{ss}] = 0$.

Постојање и број стационарних стања за неку динамику су средишња тема у многим областима и контекстима и представља отворен научни проблем. За Марковљеве процесе, чак и ако постоји стационарно стање, чак ако је и јединствено, оно не мора бити динамичко стационарно стање, тј., стање које је асимптотски ($t \to \infty$) лимес динамике за *свако* почетно стање отвореног система; асимптотско стационарно стање (АСС) је често теоријски модел феноменолошких процеса релаксације и термализације. Довољни услови за постојање АСС за Марковљеве процесе су познати за *хомогене* Марковљеве процесе (чија динамичка пресликавања чине динамичку *полугрупу*) [2]. Гибсово канонско стање отвореног система у контакту са топлотним купатилом на истој температури може бити стационарно стање отвореног система – али, не само да не мора бити АСС, већ у неким моделима није асимптотски лимес за било које почетно стање [2].

Дефиниција 22. Под *експоненцијалном функцијом ограниченог* оператора A на Банаховом простору се подразумева бесконачни ред [2]:

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n. \qquad (15)$$

Дефиниција 23. Под *временски уређеним производом* оператора, ознака [2,4]:

$$\mathcal{T}[A(t_1)B(t_2)C(t_3)\dots] \tag{16}$$

подразумева се уређење временских тренутака за све њихове пермутације, $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots$, $t_2 \geq t_1 \geq t_3 \geq \cdots$, $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq \cdots$, итд.

Најчешће је од интереса временско уређење за опсерваблу која не комутира са самом собом за различите временске тренутке, $[A(t_i), A(t_j)] \neq 0$. Временско уређење се постиже помоћу Хевисајдове степ (или „тета“) функције:

$$\theta(t-s) = \begin{cases} 1, t > s \\ a, t = s, \\ 0, t < s \end{cases} \tag{17}$$

где се ненулта вредност, a, бира, у зависности од претпоставки, или захтева, модела; често се узима „симетрична“ вредност $a = 1/2$. Корисно је упамтити да важи: ${d\theta(t-s)}/{dt} = \delta(t-s)$, где се појављује “Диракова делта функција“.

За два тренутка временско уређење је облика:

$$\mathcal{T}[A(t_1)A(t_2)] \overset{\text{def}}{=} \theta(t_1 - t_2)A(t_1)A(t_2) + \theta(t_2 - t_1)A(t_2)A(t_1), \tag{18}$$

са очигледним уоштењем на произвољан број тренутака. Вреди напоменути да је број сабирака у временском уређењу, за k тренутака, број свих пермутација скупа тренутака, тј., износи $k!$.

Оператори који комутирају са самим собом за различите временске тренутке се називају „ненарушавајућим“ (енгл., *nondemolition*) операторима, и од основног су значаја у квантној теорији мерења и теорији декохеренције.

Коначно, пар важних математичких израза (за ограничене операторе) [2]:

- $e^{L_1+L_2} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{L_1}{n}}e^{\frac{L_2}{n}}\right)^n$
- $\mathcal{G}(t,s) = \lim_{max\lfloor t_{j+1}-t_j\rfloor\to 0} \Pi_{\mathrm{j=n-1}}^{0} e^{\left(t_{j+1}-t_j\right)\mathcal{L}\left(t_j\right)}, s = t_0 \le t_1 \le \cdots \le \mathrm{t} = \mathrm{t_n}$, за свако динамичко пресликавање које је решење диференцијалне једначине (5) (*time-splitting formula*).
- $\|A\|_1 \overset{\mathrm{def}}{=} tr\sqrt{A^+A}$, за операторе који делују на Хилбертовом простору и дефинисано је узимање трага; такви оператори чине Банахов простор. [2]

Дефиниција 24. Ако за динамичка пресликавања није важан почетни тренутак (тј., од интереса је само временски интервал за почетни и крајњи тренутак), онда се за таква пресликавања каже да су *хомогена* (у времену), и тада важе следећи односи:

$$\mathcal{G}(t)\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}(t+s), \forall t, s \ge 0,$$

$$\mathcal{G}(0) = \mathcal{J}.$$

Ови изрази указују да скуп пресликавања има особину *полугрупе*.

- За полугрупе важи (5), са временски независним генератором облика (14): $\mathcal{G}(\tau) = e^{\mathcal{L}\tau}, \tau = t - t_0$; уочити аналогију са изразом за унитарни оператор за конзервативне системе – за које је време такође хомогено (почетни тренутак је произвољан), тј., гарантује одржање енергије система [2,4,7]: $U(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)/h} = e^{-iH\tau/h}$.

Дефиниција 25. Динамичко пресликавање које као домен има *цео* Банахов простор, $\mathbb{B}$, статистичких оператора система назива се *„универзалним динамичким пресликавањем (УДП)“* [2].

Дефиниција 26. За пресликавање које задовољава услов:

$$\|\mathcal{G}\|_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\|\mathcal{G}\rho\|_1}{\|\rho\|_1} \leq 1, \forall\rho \in \mathbb{B},$$

се каже да је *контрактивно*.

Дефиниција 27. За мастер једначину (у интеракционој слици, са занемаривањем Лембовог и Штарковог помераја) облика:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i,i} \mathrm{a}_{ij} \left(F_i\rho F_j^{+} - \frac{1}{2}\left\{F_j^{+}F_i, \rho\right\}\right), \qquad (19)$$

где $\left(\mathrm{a}_{ij}\right)$ представља *позитивну*(*-семидефинитну*) матрицу, каже се да је *„првог“ Линдбладовог облика*.

Из (19) лако следи други Линдбладов облик:

Дефиниција 28. За мастер једначину која је (под истим претпоставкама као у претходној дефиницији) облика (израз (14) у Дефиницији 20):

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{k} \gamma_k \left(L_i\rho L_i^{+} - \frac{1}{2}\{L_i^{+}L_i, \rho\}\right), \qquad (20)$$

ако важи $\gamma_k(t) > 0, \forall k, t$, назива се мастер једначином *„другог“ Линдбладовог облика*; и γ-е, и Линдбладови оператори могу зависити од времена.

Као што је већ напоменуто: „Марковљево динамичко пресликавање“, дато изразом (14), је еквивалентно изразима (19) и (20).

- Свако УДП, $\mathcal{G}$, има две особине: (а) потпуно је позитивно (ПП) *и* (б) контрактивно. [2]
- Ако УДП (=ПП) има инверзно пресликавање које је и само УДП (тј., ПП), онда је то пресликавање нужно *унитарно*. (*Последица*: неунитарна динамика отворених система може имати инверзну динамику, али та инверзна динамика не може бити ПП, тј. УДП) [2].

Неки појмови квантне информатике.

Дефиниција 29. Под квантним битом (кубитом) се подразумева дводимензионални унитарни векторски простор.

Један ортонормирани базис кубита се обично записује дираковски као: $|0\rangle$, $|1\rangle$. Физичко значење ових вектора је зависно од контекста. То може бити нека пројекција спина-1/2 неке квантне честице, или ефективног спина скупа честица (нпр., ефективни спин неког атома), два блиска енергијска нивоа атома, два смера струје у Џозефсоновим спојевима (SQUID-овима), положај електрона у чврстој структури (квантне тачке), итд. [3].

Задати базис непосредно води изградњи алгебре оператора на простору (стања) кубита, која задовољава добро познату алгебру опште теорије ангуларног момента. У уобичајеним ознакама, које подразумевају да је изабрани базис својствени за z -Паулијев оператор, опсервабле су дате изразима:

$$\sigma_z \equiv Z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|, \sigma_x \equiv X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \sigma_y \equiv Y = -i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1|, \tag{21}$$

уз алгебру:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{22}$$

где се појављује δ_{ij}, Кронекерова делта, и ε_{ijk}, тензор Леви-Чивита. Наравно, једно „разлагање јединице“ је дато изразом $I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$. Дијаде $|0\rangle\langle 1|$ и $|1\rangle\langle 0|$ се често посебно обележавају и изражавају преко Паулијевих оператора: $\sigma_- \equiv |0\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(X - iY), \sigma_+ \equiv |1\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}(X + iY)$, и називају (Паулијевим) операторима „снижења“ (“lowering”) и „повишења“ (“raising”), тим редом.

Дефиниција 30. За мешано стање, ρ, дводелног квантног система се каже да је *сепарабилно* ако се то стање може записати у облику:

$$\rho = \sum_{i,j} p_{ij}\, \rho_{1i} \otimes \rho_{2j}, \qquad (23)$$

где су $\rho_{\alpha i}, \alpha = 1{,}2$, статистички оператори два подсистема и важи $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$. Ако се стање не може записати у облику (23), онда се за такво стање каже да је *квантно сплетено* (енг.: entangled state).

Тривијалан случај је када је $p_{ij} = \delta_{ij}$, тј., када је

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \qquad (24)$$

што је стање у којем *нема никаквих (ни класичних, ни квантних) корелација подсистема* 1 и 2.

Важе следећи ставови [6]:

- Класичне корелације два система се увек представљају мешаним стањем целине,
- Сепарабилно мешано стање може имати ненулте квантне корелације које не морају (а могу) да обухватају квантну сплетеност. Такве корелације се називају *„квантним дискордом“*,

- Квантни дискорд, по оба подсистема, је једнак нули <u>акко</u> су ρ_{1i} и ρ_{2j} у изразу (23) ортогонални пројектори на одговарајуће подпросторе простора стања два подсистема. Таква стања носе искључиво класичне корелације подсистема,
- Једино квантно стање које нема никаквих корелација подсистема је тривијални тензорски производ, израз (24).

[1] K. Kraus, “States, Effects, and Operations. Fundamental Notions of Quantum Theory”, vol. 190 (Springer, Berlin, 1983) (Lecture Notes)

[2] A. Rivas, S. F. Huelga, “Open Quantum Systems. An Introduction”, SpringerBriefs in Physics, Springer, 2011

[3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

[4] H.-P. Breuer, F. Petruccione, “The Theory of Open Quantum Systems”, Clarendon Press, Oxford, 2002

[5] A. Shaji, PhD thesis, 2005

https://search.proquest.com/openview/830d6cd3ef5907c5b8edd5169b645e3c/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

[6] K. Modi et al, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655-1707 (2012)

[7] Ф. Хербут, „Квантна механика“, ПМФ, Београд, 1984

РЕШЕНИ ЗАДАЦИ

Подела задатака на поглавља је условна – многи задаци се могу сместити у више од једног од ниже датих поглавља; алтернативно груписање задатака дато је алтернативним садржајем на крају збирке. Решења која нису добијена аналитичким путем, добијена су коришћењем Волфрамове *Mathematica*-е, те се тако могу, и решавати, и проверавати.

Усвојена подела задатака следи из циља за сваки део поделе:

- Уводни задаци: Циљ је истаћи *саму срж квантне физике*, тј., *квантну кохеренцију* чистих, а отуда, последично, и мешаних стања, и то са више страна и аспеката, како кинематичких, тако и динамичких. То је уједно и основни садржај који се појављује у пажљиво планираном, првом сусрету са облашћу.
- Математички увод: Циљ је представити основне појмове и односе у формализму теорије, што укључује и неке опште математичке ставове.
- Општи задаци: Овај део представља средиште ове збирке задатака.
- Посебни задаци: Циљ овог дела је проширење претходних делова, са нагласком на неке посебне задатке које успоставља савремени развој области, како у теоријским, тако и у примењеним истраживањима. Понуђена решења задатака су мање систематична и мање детаљна од решења задатака из прва три поглавља, јер се тичу истраживачких задатака за која се очекује да ће читалац уложити известан самостални рад.

Уводни задаци

1.1 Истаћи значај „интерференционих чланова“ у разликовању чистих и мешаних квантних стања.

Решење: Ричард Фајнман је сматрао да суштина квантне механике лежи у интерференционим члановима којих у класичној физици честица нема. Конкретно, линеарна суперпозиција чланова неког ОНБа, $|i\rangle$, $|\varphi\rangle = \sum_i c_i\, |i\rangle$, носи „интерференцију“ које нема у “некохерентној мешавини“ стања из *истог* ОНБа, тј., у мешаном стању $\rho = \sum_i |c_i|^2\, |i\rangle\langle i|$:

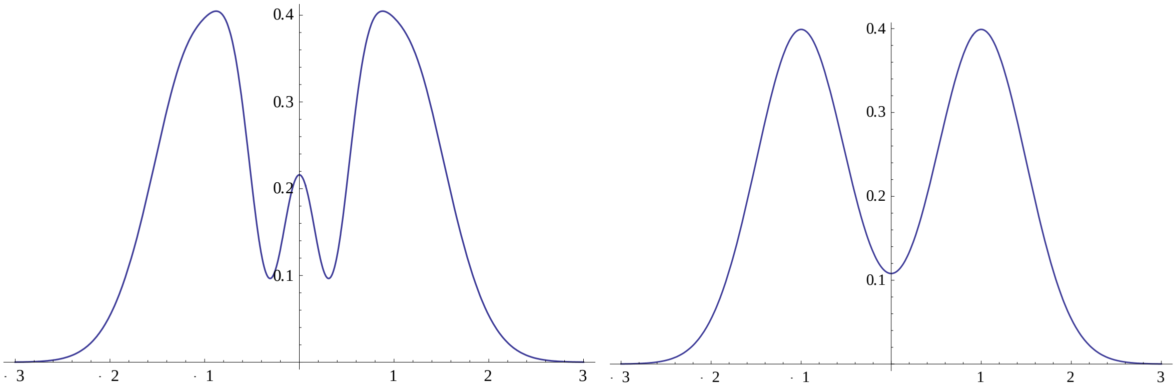
$$C = |\varphi\rangle\langle\varphi| - \rho = \sum_{i\neq j} c_i\, c_j^* |i\rangle\langle j| \neq 0. \qquad (1.1а)$$

Присуство ових чланова имплицира: $(|\varphi\rangle\langle\varphi|)^2 = |\varphi\rangle(\langle\varphi||\varphi\rangle)\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, док $\rho^2 = (\sum_i |c_i|^2\, |i\rangle\langle i|)^2 = \sum_i (|c_i|^2)^2\, |i\rangle\langle i| \neq \rho$. Ова разлика је уједно и основна, темељна разлика чистих и мешаних квантних стања. Следеће илустрације указују на то како се интерференциони чланови појављују.

Размотримо три стања минималне неодређености за једнодимензионални систем у координатној репрезентацији:

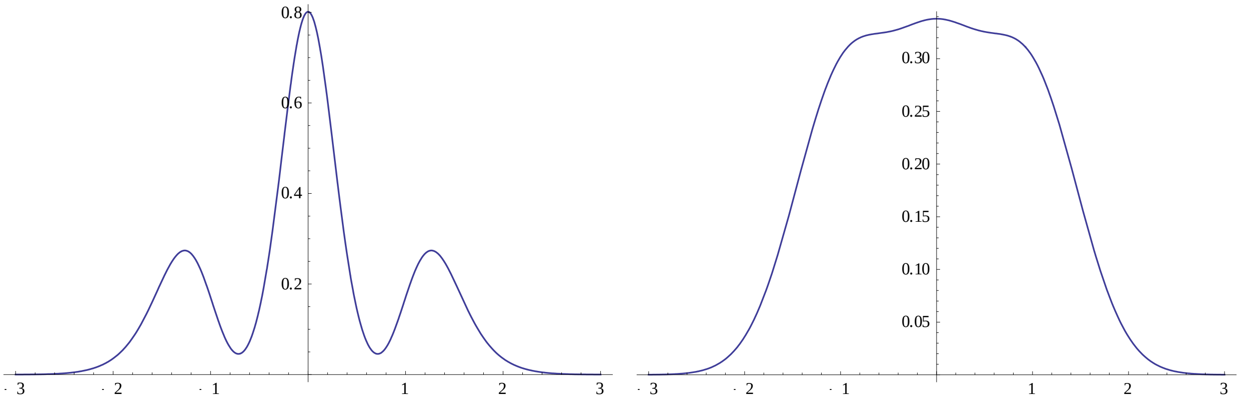
$$\varphi_\pm(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-(x\pm1)^2\pm4ix}, \chi(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \qquad (1.1б)$$

Сада уведимо суперпозиције ових стања: (а) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi_+(x) + \varphi_-(x)\big)$ и $\rho = \frac{1}{2}(|\varphi_+(x)|^2 + |\varphi_-(x)|^2)$, и (б) $\frac{1}{\sqrt{3}}\big(\varphi_+(x) + \varphi_-(x) + \chi(x)\big)$ и $\rho = \frac{1}{3}(|\varphi_+(x)|^2 + |\varphi_-(x)|^2 + |\chi(x)|^2)$. Графички представљено, стања под (а):



Слика 1.1 Графички приказ стања уведених горе под тачком (а).

и стања под (б):

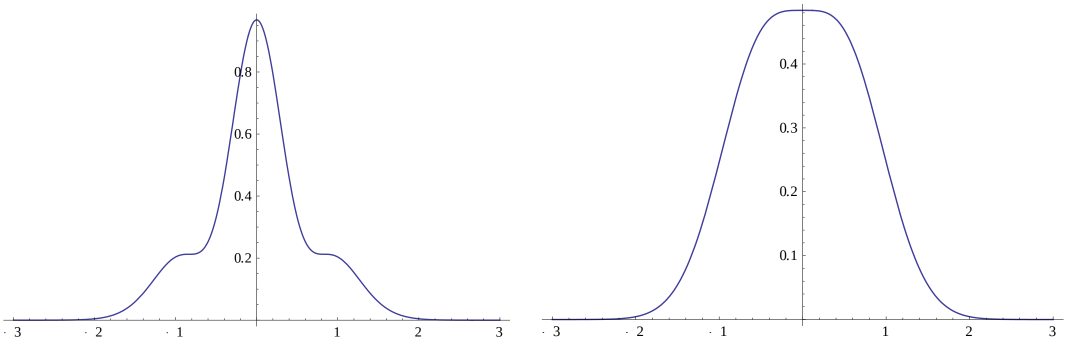


Слика 1.2 Графички приказ стања уведених горе под тачком (б).

где су са леве стране резултати за чиста стања. Интерференциони чланови воде појављивању локалних максимума око $x = 0$, и њих *нема увек* код мешаних стања (десне стране графика).

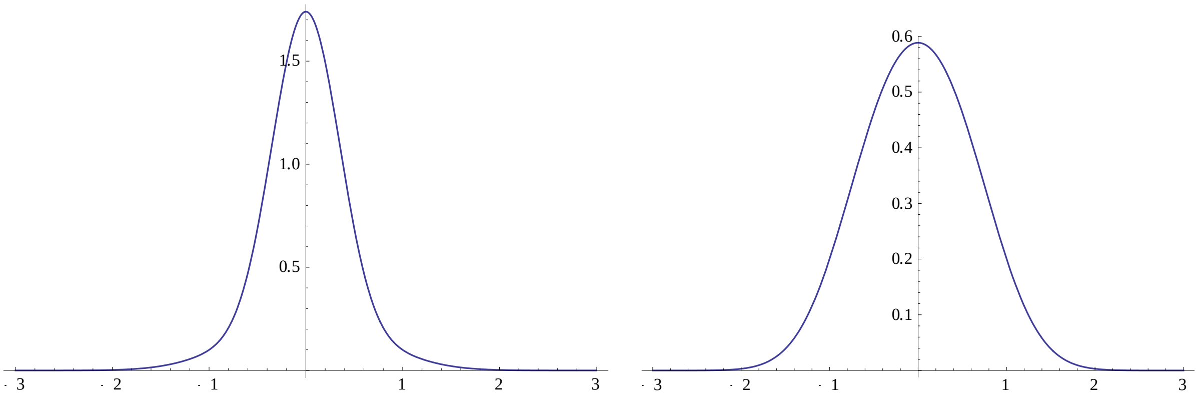
Али поређење горњег лево и доњег десно графика може навести на следеће уочавање: одређено „деформисање“ једног од њих може водити другом, те би све то, квалитативно, можда могла бити једна те иста ствар (иста физика); уочити благи локални минимум на слици доле, десно. И заиста, ако се ради са другачијим стањима у којима се у експоненту појављују $-(x \pm 0.5)^2 \pm 2ix$, Слика 1.3 представља алтернативу Сликама 1.1 и 1.2:

(а)



Слика 1.3 Графички приказ стања уведених горе под тачком (а) за нове експоненте.

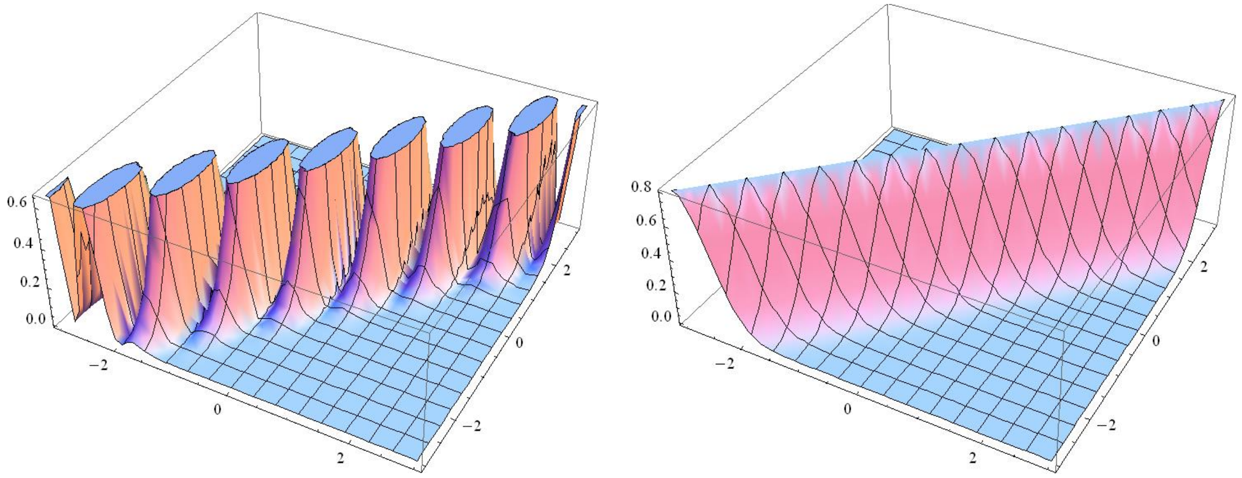
(б)



Слика 1.4 Графички приказ стања уведених горе под тачком (б) за нове експоненте.

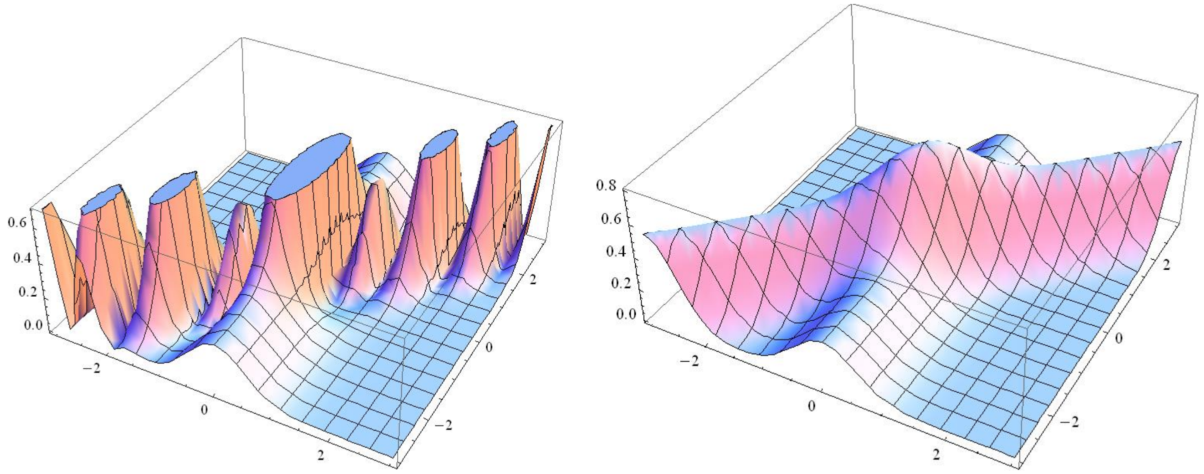
Дакле, разликовање разматраних чистих и мешаних стања, тј., испољавање „кохеренције“, лежи *у разлици суседних максимума и минимума*. У квантним интерференционим експериментима основни *критеријум интерференције* је довољно уочљива разлика између суседних максимума и минимума, која се назива *контрастом*. Другим речима: да би се *оперативно* уочило да ли је стање чисто, или мешано, потребно је уочити *довољан* контраст – *иако је математичка разлика очигледна*. Штавише, ова разлика је непрекидна, као што се види са слика ниже, где је квадратни члан у експоненту горњих гаусијана и сам произвољан, $(x - x_0)^2$, где $x, x_0 \in [-3,3]$.

(а)



Слика 1.5 Као на слици 1.3, са општим експонентом за случај (а).

(б)



Слика 1.6 Као на слици 1.3, са општим експонентом за случај (б).

Највећи контраст (леви графици) је на дијагонали и *непрекидно* опада лево и десно од дијагонале. Зато није једноставан „пренос“ чисто математичких резултата у лабораторију: оперативно уочавање математички очигледних ствари може да носи изазове. У вези са тим, не заборавимо: квантна механика је *рођена* у лабораторији.

1.2 Задатак 1.1 сугерише да је у лабораторији лако бити несигуран у то да ли је дати ансамбл у чистом, или мешаном стању. У том смислу су корисна два критеријума, тзв., „верност“ (енг.: *fidelity*) која је дефинисана изразом $F(\rho,\sigma) = tr\sqrt{\sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma}}$, и растојање међу стањима (енг.: *trace distance*), дефинисано изразом $D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\|\rho - \sigma\|_1$ за било која два стања (чиста, или мешана). Размотрити корисност ових критеријума када је у питању „интерференциони члан“ чистих квантих стања.

Решење: Величина $F(\rho,\sigma)$ је симетрична на замену стања [3]. Како желимо да упоредимо чисто и мешано стање из претходног задатка, лакше је одабрати $\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Како $|\varphi\rangle\langle\varphi| = 1 \cdot |\varphi\rangle\langle\varphi| + 0 \cdot |.\rangle\langle.| + \cdots$, то важи $\sqrt{\sigma} = \sqrt{|\varphi\rangle\langle\varphi|} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, па верност поприма облик:

$$F(\rho,|\varphi\rangle\langle\varphi|) = tr\sqrt{(|\varphi\rangle\langle\varphi|)\rho(|\varphi\rangle\langle\varphi|)} = \sqrt{\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle}tr\sqrt{|\varphi\rangle\langle\varphi|} = \sqrt{\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle}. \qquad (1.2а)$$

Дакле, верност је мера преклапања чистог и мешаног стања. Израз (1.2а) се може поједноставити: $\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = tr(|\varphi\rangle\langle\varphi|\rho) = tr\big((\rho + C)\rho\big) = tr\rho^2 + tr(C\rho)$. Како се лако доказује да $tr(C\rho) = 0$, коначно следи израз за верност: $F(\rho,|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sqrt{tr\rho^2}$, у којем се интерференциони члан не појављује, то јест:

$$F(\rho,|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sqrt{\sum_{i,j} c_i^* \, c_j \langle i|(\sum_k |c_k|^2 \, |k\rangle\langle k|)|j\rangle} = \sqrt{\sum_i (|c_i|^2)^2}. \qquad (1.2б)$$

Са друге стране, растојање $D(\rho,\sigma)$ управо квантификује интерференциони члан:

$$D(|\varphi\rangle,\rho) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\||\varphi\rangle\langle\varphi| - \rho\|_1 = \frac{1}{2}\|C\|_1. \qquad (1.2в)$$

Норма неког оператора A који није позитивно-семидефинитан, дефинише се општим изразом: $\|A\|_1 = tr\sqrt{A^+A} \overset{\text{def}}{=} tr|A| = \sum_i |a_i|$, где се у збиру налазе апсолутне вредности својствених вредности оператора A. Примењено на растојање,

$$D(|\varphi\rangle, \rho) = \frac{1}{2} tr|C|, \tag{1.2г}$$

што је општи израз којим се истиче веза између растојања чистог и мешаног стања који се разликују за интерференциони члан C.

Вероватно је очигледно да су изрази (1.2б) и (1.2г) комплементарни, у смислу да први искључује, док други непосредно разматра интерференциони члан. Ово уочавање је један аспект неједнакости која се доказује у оквирима теорије квантне информације, и која важи за сваки коначнодимензионални простор стања [3]:

$$1 - F \leq D \leq \sqrt{1 - F^2}. \tag{1.2д}$$

Дакле, уопштено, како израз (1.2д) указује: што је већа сличност, тј., верност F, два стања, то је мање растојање међу њима. Сменом (1.2б) и (1.2в) у (1.2д) се добија неједнакост:

$$1 - \sqrt{\sum_i (|c_i|^2)^2} \leq \frac{1}{2} tr|C| \leq \sqrt{1 - \sum_i (|c_i|^2)^2}. \tag{1.2ђ}$$

Из израза (1.2ђ) је очигледно да максимална вредност растојања, која износи 1, не може бити досегнута, јер би захтевала $c_i = 0, \forall i$; наравно, то је очекивано, јер максимално растојање (нулта верност) важи само за међусобно ортогонална стања ($\rho\sigma = 0$). Минимална вредност, која износи 0, очигледна је из (1.2ђ): неко $c_i = 1$, и сви остали коефицијенти су једнаки нули; наравно, ово је тривијалан случај када је $|\varphi\rangle\langle\varphi| = \rho$.

Потпуности ради, укажимо још на неке особине оператора који одговара интерференционом члану.

Важе једнакости: $\sum_{i \neq i'} c_i c_j^* |i\rangle\langle j| \overset{\text{def}}{=} C = \sum_k C_k |k\rangle\langle k|$, где су C_k својствене вредности „оператора кохеренције“, C. Одатле непосредно следе две једнакости:

$$0 = \langle i|C|i\rangle = \sum_k C_k |\langle i|k\rangle|^2, \forall i,$$

$$C_k = \langle k|C|k\rangle = \sum_{i,i'(\neq i)} c_i c_{i'}^* \, \langle k|i\rangle\langle i'|k\rangle. \tag{1.2е}$$

Како прва од ове две једнакости важи за свако i, то ће важити и за сваки збир чланова $\langle i|C|i\rangle$. То јест, важи:

$$\sum_{k,i} C_k \, \alpha_i |\langle i|k\rangle|^2 = 0,$$

за *сваки могући* избор константи $\{\alpha_i\}$. Да би то могло бити задовољено, и да још важи нулти траг оператора кохеренције, $\sum_k C_k = 0$, једини начин је да $|\langle i|k\rangle|^2 = const., \forall i, k$, то јест, да $\langle i|k\rangle = e^{i\delta_{ik}} N^{-1/2}$ за N-димензионални простор стања. Тада се добија $C_k = \sum_{i,i'(\neq i)} c_i c_{i'}^* \, e^{i\left(\delta_{ik} - \delta_{i'k}\right)}/N$. Отуд, коначно:

$$D(|\varphi\rangle\langle\varphi| - \rho) = \frac{1}{2N} \sum_k \left| \sum_{i,i'(\neq i)} c_i c_{i'}^* \, e^{i\left(\delta_{ik} - \delta_{i'k}\right)} \right|. \tag{1.2ж}$$

НАПОМЕНА: Обе мере разликовања квантних стања су настале из потребе *оперативног* разликовања квантних стања[1], углавном преносом класичних мера заснованих на статистици мерења. Зато се може рећи да су овде разматране мере ново оперативно средство које на свој начин одговара на проблем истакнут у Задатку 1.1. Независна процена D, у складу са (1.2ж), следи из следећег уочавања[2]: може се показати (коришћењем, тзв., Вејлове неједнакости за матрице) да *сви* непозитивни оператори (какав је $\rho - \sigma$) имају *тачно једну позитивну* својствену вредност, означимо је са C_+. Како су сви оператори ове врсте нултог трага, то следи да је збир свих других (негативних) својствених вредности једнак $-C_+$. Тако се добија: $D(\rho - \sigma\,) = \frac{1}{2} tr|\rho - \sigma| = C_+$. Потрага за мешаним стањем које би било најближе задатом чистом стању (што би одговарало потрази за коефицијентима c_i који би у изразу (1.2ж) дали најмању вредност) је сложен оптимизацијски проблем већ за $N = 3$.

1.3 Упоредити чиста и мешана стања из Задатка 1 анализом стандардних одступања и ентропије (фон Нојманове, и линеарне).

Решење: За свако чисто стање постоји опсервабла са ненултим стандардним одступањем. Доказ је тривијалан: распис стања преко неког базиса (којем то стање не припада) даје ненулто стандардно одступање за сваку опсерваблу

---

[1] C.A. Fucks, arXiv:quant-ph/9601020v1.

[2] S. Rana et al, Phys. Rev. A **93**, 012110 (2016).

чији је један својствени базис баш тај по којем је стање расписано. Формално: неко чисто стање $|\varphi\rangle$ и неки ОНБ $|i\rangle$, тако да $\langle i|\varphi\rangle \neq 0,1$: $\forall B = \sum_i b_i\, |i\rangle\langle i|$, $\Delta B = \sqrt{\sum_i |c_i|^2 b_i^2 - (\sum_i |c_i|^2 b_i)^2} > 0$. Са друге стране, за свако чисто стање постоји опсервабла (простим задавањем) чије је то стање својствено.

Не постоји комплетна опсервабла за коју би било које мешано стање било својствено – тј., за коју би *било која* два смешана чиста стања била мешавина својствених стања за исту својствену вредност опсервабле. За неку комплетну опсерваблу задат је ОНБ, $|i\rangle$. Некохерентно мешање ових стања (било који број њих), $\sum_i p_i\, |i\rangle\langle i|$, води ненултој дисперзији комплетне опсервабле, $\Delta B = \sqrt{\sum_i p_i b_i^2 - (\sum_i p_i b_i)^2} > 0$.

Фон Нојманова ентропија дефинисана је изразом:

$$S = -tr(\rho\, log_2 \rho), \tag{1.3а}$$

док је линеарна ентропија њена прва апроксимација [3]:

$$S_{lin} = tr(\rho - \rho^2). \tag{1.3б}$$

У својственом базису за ρ (спектралне форме: $\rho = \sum_i p_i\, |i\rangle\langle i|, \langle i|j\rangle = \delta_{ij}$):

$$S = -\sum_i p_i\, log_2 p_i,\ S_{lin} = \sum_i p_i\, (1 - p_i). \tag{1.3в}$$

Како је за чисто стање $p_{i_0} = 1, p_i = 0, \forall i \neq i_0$, то су обе ентропије једнаке нули (јер $0 \cdot log_2 0 = 0$).

Ово не важи за мешана стања, за која је макар један пар, $p_i \neq 0,1, i = 1,2, \ldots$, тј., важи макар

$$-\sum_{i=1,2} p_i\, log_2 p_i > 0, \sum_{i=1,2} p_i\, (1 - p_i) > 0. \tag{1.3г}$$

Дакле, ентропија је поузданији критеријум за разликовање чистих од мешаних стања.

НАПОМЕНА: Нулта ентропија чистих, и *увек* ненулта ентропија мешаних стања се обично исказују фразом да су чиста стања носилац максималне информације о систему (тзв., „квантни информатички лимит“). Ова фраза оправдана је и уочавањем да увек постоји опсервабла за коју неко чисто стање даје ненулто стандардно одступање. Другачије исказано ово последње: у квантној механици не постоје бездисперзиони ансамбли – који су, пак, *основна особеност класичних* система.

1.4 Препаратор поларизације фотона не ради савршено. Уместо идеалне поларизације наниже y осе, даје 4/5 жељене поларизације, и остатак наниже x осе. Представити ову статистичку мешавину и решити својствени проблем добијеног статистичког оператора.

Решење: Поларизација фотона у нерелативистичким процесима се своди на формализам спина ½. У Z-репрезентацији, својствени вектор Y компоненте спина са својственом вредношћу -1 је дат адјунгованим вектором-врстом $|-\rangle_y \to (2^{-1/2} \quad i2^{-1/2})$, док је то исто за X компоненту спина $|-\rangle_x \to (2^{-1/2} \quad -i2^{-1/2})$. Дакле, ансамбл добијен неидеалним радом поларизатора дефинише статистички оператор (без репрезентације):

$$\rho = \frac{4}{5}|-\rangle_y\langle -| + \frac{1}{5}|-\rangle_x\langle -|. \tag{1.4а}$$

Како стања смешаних подансамбала нису ортогонална, дати израз не представља спектралну форму стања ρ. У матричном облику, стање је репрезентовано матрицом, у стандардној Z-репрезентацији:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}-\frac{2i}{5}\\ -\frac{1}{10}+\frac{2i}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \tag{1.4б}$$

што упоређивањем са општим обликом стања за спин-1/2, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{n_z} & \mathrm{n_-}\\ \mathrm{n_+} & 1-\mathrm{n_z}\end{pmatrix}$, води закључку да стање одговара Блоховом вектору $\vec{n} =$

$\left(n_x, n_y, n_z\right) = (-1/5{,}4/5{,}0)$, дужине $n = \frac{\sqrt{17}}{5} < 1$, што је потврда да се ради о мешаном (а не чистом, за које је $n = 1$) стању.

Својствене вредности и својствени вектори ρ се налазе да гласе: $\frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{17}\right)$, $\frac{1}{10}(5 - \sqrt{17})$, и $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1+4i}{\sqrt{17}} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+4i}{\sqrt{17}} \\ 1 \end{pmatrix}$, редом.

Сада *спектрална форма* стања у Z-репрезентацији гласи:

$$\frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{17}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1+4i}{\sqrt{17}} \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1-4i}{\sqrt{17}} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\left(5 - \sqrt{17}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+4i}{\sqrt{17}} \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1-4i}{\sqrt{17}} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{17}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\frac{1}{2}+2i}{\sqrt{17}} \\ -\frac{\frac{1}{2}-2i}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\left(5 - \sqrt{17}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\frac{1}{2}+2i}{\sqrt{17}} \\ \frac{\frac{1}{2}-2i}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad (1.4в)$$

Ансамбалско тумачење овог облика стања је очигледно: смешана су два чиста подансамбла, који се налазе у стањима (својственим за ρ), $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1+4i}{\sqrt{17}} \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+4i}{\sqrt{17}} \\ 1 \end{pmatrix}$, са статистичким тежинама (што су својствене вредности ρ) $\frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{17}\right)$ и $\frac{1}{10}(5 - \sqrt{17})$, редом. Алгебарски запис би био:

$$\rho = \frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{17}\right)\lfloor 1\rangle\langle 1| + \frac{1}{10}(5 - \sqrt{17})\lfloor 2\rangle\langle 2|. \qquad (1.4г)$$

Дакле, једно стање ρ се може представити на различите начине, са сасвим различитим ансамбалским тумачењима:

$$\frac{4}{5}|-\rangle_y\langle -| + \frac{1}{5}|-\rangle_x\langle -| = \rho = \frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{17}\right)\lfloor 1\rangle\langle 1| + \frac{1}{10}(5 - \sqrt{17})\lfloor 2\rangle\langle 2|. \qquad (1.4д)$$

Штавише, може се показати да за сваки статистички оператор постоји непребројиво много различитих разлагања по неортогоналним стањима, а отуда и њима придружених, интуитивно нееквивалентних, ансамбласких тумачења. Једино што је јединствено јесте, ако је познат, облик статистичког оператора и, свакако, његова спектрална форма; својствени базис статистичког оператора, наравно, није једнозначан када има дегенерације својствених вредности, што овде (дводимензионални простор) не може бити случај. Отуда и наук: ако је задато само стање у математичком запису, нпр., у матричном облику, не може се једнозначно понудити одговор на питање који ансамбли (чисти, или мешани) су смешани. Једини начин да се то зна јесте да је унапред, као у поставци овог задатка, речено који (под)ансамбли су смешани.

НАПОМЕНА: Под „ансамбалским тумачењем“ овде подразумевамо *стандардан појам Гибсовог („статистичког“) ансамбла*, у којем се сваки појединачни члан ансамбла налази у једном стању из скупа смешаних (тј., припада само једном подансамблу из скупа смешаних подансамбала), са одговарајућом статистичком тежином. Ово је уобичајено у физици и у складу је са фон Мизесовом теоријом вероватноће, која се често узима и као тумачење Колмогорољеве аксиоматске теорије вероватноће[3]. Али, постоји (макар једна) *алтернатива*, честа у оквирима теорије квантне информације и квантног рачунања [3]. Наиме, тамо се често сматра да је *сваки појединачни систем мешаног ансамбла у истом, мешаном, стању* ρ. У контексту Гибсовог (и фон Мизесовог) појма ансамбла, ово тумачење је извесно остварење замисли да је сваки члан ансамбла *статистички типичан*, тј., у неком смислу, „просечни“ представник ансамбла. За разлику од мешаних, чисти ансамбли имају једноставну интерпретацију: сви елементи чистог ансамбла, којем је придружено неко чисто стање, се налазе у истом, задатом чистом стању ансамбла [3,7].

1.5 За спинско стање честице спина ½ задато је мешано стање:

$$\rho = \frac{1}{2}(|+\rangle_z\langle+| + |-\rangle_z\langle-|),$$

где су смешана својствена стања Z-компоненте спина. Записати ово стање преко својствених стања X-компоненте спина.

Решење: Очигледно је да је стање заправо умножак идентичног оператора:

$$\rho = \frac{1}{2}I. \tag{1.5a}$$

---

[3] A. Khrennikov, arXiv.1410.5773

Како „разлагање јединице“ важи за сваки базис, тј., $I = |+\rangle_i\langle+| + |-\rangle_i\langle-|$, за свако $i = x, y, z$ у дводимензионалном простору, то се одмах може писати:

$$\rho = \frac{1}{2}(|+\rangle_x\langle+| + |-\rangle_x\langle-|). \tag{1.5б}$$

НАПОМЕНА: Овакво стање се назива „максимално смешаним“, или „потпуно деполаризованим“. Лако се може показати да ово стање следи неселективним ортогоналним мерењем било које компоненте спина, ако је почетно чисто стање $|\varphi\rangle = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}|-\rangle_z$.

1.6 Доказати да унитарна еволуција у времену не може превести било које чисто у било које мешано стање.

Решење: Интерференциони чланови (Задатак 1.1) уводе формалну разлику чистих и мешаних стања: свако чисто стање $|\varphi\rangle$ еквивалентно је пројектору $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ који је идемпотентан, тј., $(|\varphi\rangle\langle\varphi|)^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. За мешана стања – која „мешају“ пројекторе – то не важи, тј., за мешана стања увек важи неједнакост: $\rho^2 \neq \rho$. Сада је лако доказати тврдњу задатка. То ће бити урађено *општије*: за *произвољну* унитарну трансформацију: $|\varphi\rangle \to U|\varphi\rangle$, тј., $|\varphi\rangle\langle\varphi| \to U|\varphi\rangle\langle\varphi|U^+$, и $\rho \to U\rho U^+$.

Наиме, унитарне операције (унитарна пресликавања) сачувавају „чистоту“ стања: ако је стање чисто, онда остаје чисто и после унитарног пресликавања:

$$tr\rho^2 \equiv tr\,((U|\varphi\rangle\langle\varphi|U^+)^2) = tr\Big((U|\varphi\rangle\langle\varphi|U^+)(U|\varphi\rangle\langle\varphi|U^+)\Big) =$$
$$tr(U|\varphi\rangle(\langle\varphi||\varphi|\rangle)\langle\varphi|U^+) = tr(U|\varphi\rangle\langle\varphi|U^+) = tr|\varphi\rangle\langle\varphi| = tr\rho. \tag{1.6а}$$

Исто важи и за ентропију: ентропија се не може променити унитарним пресликавањем. Докажимо ово за фон Нојманову ентропију. Позајмљујући из претходног задатка:

$$S = -\sum_i p_i\, log_2 p_i. \tag{1.6б}$$

како унитарно пресликавање не мења својствене вредности опсервабли, овде:

$U\rho U^{+} = U\sum_i p_i\, |i\rangle\langle i|U^{+} = \sum_i p_i\, |i_u\rangle\langle i_u|, \quad \langle i_u|j_u\rangle = \delta_{ij}, \quad |i_u\rangle = U|i\rangle,$ (1.6в)

то горњи израз за ентропију остаје непромењен, јер се скуп својствених вредности стања ρ се не може променити било којим унитарним пресликавањем.

Укупно је потврђен став (тврдња) задатка: унитарна пресликавања не могу било које чисто стање да преведу у било које мешано стање, или обратно.

НАПОМЕНА: Дакле*, једина* врста *(*линеарних*) пресликавања* између чистих и мешаних стања која су дозвољена су *неунитарна* пресликавања. *Динамичко* пресликавање које преводи чиста у мешана стања, и при томе истиче један ОНБ простора стања система, назива се *декохеренцијом*. Често се, у експериментима, декохеренција утврђује провером присуства/одсуства контраста између суседних максимума и минимума описаних у Задатку 1.1.

1.7 Задата је опсервабла у спектралном облику, $A = a_1P_1 + a_2P_2 = a_1(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|) + a_2|4\rangle\langle 4|$, и два чиста стања, $|\varphi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|3\rangle + c_3|4\rangle$, $|\chi\rangle = d_1|2\rangle + d_2|4\rangle$. Израчунати вероватноће предиктивног (фон Нојмановог, „ортогоналног“) мерења опсервабле у датим стањима и коначна стања у селективној и неселективној варијанти.

Решење: Пројективно (фон Нојманово, „ортогонално“) мерење је линеарна, неунитарна трансформација стања *постулирана* изразима:

$|\varphi\rangle \to \frac{P_i|\varphi\rangle}{\|P_i|\varphi\rangle\|}$, са вероватноћом $\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle$, за селективну варијанту,

$\rho \to \sum_i P_i\, \rho P_i$, за неселективно мерење.

Ова врста мерења представља (линеарно) *неунитарно* пресликавање стања које, очигледно, чисто стање (када је $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$) може да преведе у мешано стање. Сходно Задатку 1.6, такво пресликавање се не може свести, или дедуковати, из унитарног пресликавања на простору стања мереног система. Другим речима (од важности у теорији квантне информације): неунитарно мерење се не може изградити само од унитарних пресликавања на систему. Овај контраст са Шредингеровим законом је основна формулација славног *проблема квантног мерења*.

Из поставке задатка и дефиниције коначног стања (после мерења) очигледно је:

$\frac{P_1|\varphi\rangle}{\|P_1|\varphi\rangle\|} = \frac{c_1|1\rangle + c_2|3\rangle}{\sqrt{|c_1|^2+|c_2|^2}}, \frac{P_2|\varphi\rangle}{\|P_2|\varphi\rangle\|} = \frac{c_3}{|c_3|}|4\rangle$, са вероватноћама $p_1 = |c_1|^2 + |c_2|^2$, $p_2 = |c_3|^2$,

$\frac{P_1|\chi\rangle}{\|P_1|\chi\rangle\|} = \frac{d_1}{|d_1|}|2\rangle, \frac{P_2|\chi\rangle}{\|P_2|\chi\rangle\|} = \frac{d_2}{|d_2|}|4\rangle$, са вероватноћама $p'_1 = |d_1|^2, p'_2 = |d_2|^2$.

Сходно горњем постулату за неселективна мерења:

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| \to (c_1|1\rangle + c_2|3\rangle)(c_1^*\langle 1| + c_2^*\langle 3|) + |c_3|^2|4\rangle\langle 4|, \tag{1.7а}$$

$$|\chi\rangle\langle\chi| \to |d_1|^2|2\rangle\langle 2| + |d_2|^2|4\rangle\langle 4|. \tag{1.7б}$$

Поучно је дати ове прелазе у A-репрезентацији. Уобичајени развој по базису, нпр.:

$$(|\varphi\rangle\langle\varphi|)\ |i\rangle, i = 1,2,3,4, \tag{1.7в}$$

и транспоновање матрице развоја чији су чланови $\langle j|\ \ (|\varphi\rangle\langle\varphi|)\ \ |i\rangle$, даје:

$$\begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 & c_1c_2^* & c_1c_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2c_1^* & 0 & |c_2|^2 & c_2c_3^* \\ c_3c_1^* & 0 & c_3c_2^* & |c_3|^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 & c_1c_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2c_1^* & 0 & |c_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |c_3|^2 \end{pmatrix}, \tag{1.7г}$$

где се може уочити *нестајање неких вандијагоналних чланова* као *последица пресликавања* (тј., поступка мерења); формално, као следећи корак могао би уследити нестанак и преосталих вандијагоналних елемената ($c_1c_2^*$) *у репрезентацији мерене опсервабле*. То је управо случај за почетно стање $|\chi\rangle$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_1|^2 & 0 & d_2 d_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 d_2^* & 0 & |d_2|^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_1|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_2|^2 \end{pmatrix}. \qquad (1.7д)$$

НАПОМЕНА: Губљење вандијагоналних чланова, закључак је Задатка 1.1, је укидање интерференционих чланова – укидање „кохеренције“, тј., „декохеренција“ (енг.: *decoherence*). А процес мерења је таква врста (линеарних) пресликавања која то може да оствари.

1.8 У интерференционом експерименту, фотон може ићи само двема путањама. На крају само једне од њих је детектор. Показати да одсуство „откуцаја“ детектора постављеног на једну од могућих путања представља један могући резултат ортогоналног квантног мерења.

Решење: По претпоставци задатка, мерење може дати само две могућности, нпр., означене као „фотон је ишао левом путањом“, и „фотон је ишао десном путањом“. Како је експеримент припремљен тако да су ове две могућности међусобно искључиве и комплементарне (или десна, или лева путања), ортогонална стања и њима одговарајући пројектори су облика: $|leva\,putanja\rangle \leftrightarrow P_{leva\,putanja} \equiv P_l$, и $|desna\,putanja\rangle \leftrightarrow P_{desna\,putanja} \equiv P_d$. Поента је у томе да нема треће могућности, тј., да $P_l P_d = P_d P_l = 0, P_l + P_d = I$ где последња једнакост даје апсолутно сигуран догађај [7]. Нека је детектор постављен на десну путању. Тада („негативан“) резултат мерења одговара левој путањи на којој нема детектора, па отуда фотон није „уништен“ апсорпцијом од стране детектора; као такав, фотон је на располагању за нека наредна мерења – то јест, овај исход одговара предиктивном мерењу после којег је једнозначно познато стање – овде путања – фотона. Томе одговара догађај којег описује пројектор P_l. Сходно постулату (претходни задатак), коначно стање после селективног предиктивног мерења, за дати (негативни) резултат, даје коначно стање:

$$\frac{P_l|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|P_l|\varphi\rangle}}. \qquad (1.8а)$$

Вероватноћа добијања таквог резултата је $\langle\varphi|P_l|\varphi\rangle$, па је вероватноћа добијања супротног (јединог преосталог) резултата дата изразом: $\langle\varphi|P_d|\varphi\rangle = 1-\langle\varphi|P_l|\varphi\rangle$, за произвољно почетно чисто стање $|\varphi\rangle$ - што је и требало показати.

НАПОМЕНА: Овај пример „негативног мерења“, у којем нема одговора детектора, је добра илустрација зашто је информатички језик згодан за квантномеханичка разматрања: квантно мерење је *увек успешно* када је *добијена* (класична, овде: или, или) *информација* о објекту мерења. Одсуство одговора детектора се понекад погрешно тумачи као одсуство физичке интеракције фотона са детектором. Али, као што знамо, без интеракције фотона и детектора није могуће моделовати квантно мерење у оквиру претпоставке да је динамика целине, „фотон+детектор“, унитарна (видети и Задатак 1.12), што се записује пресликавањем:

$$\left(c_l|leva\,putanja\rangle_{foton} + c_d|desna\,putanja\rangle_{foton}\right) \otimes |0\rangle_{detektor} \rightarrow$$
$$c_l|leva\,putanja\rangle_{foton} \otimes |0\rangle_{detektor} + c_d|desna\,putanja\rangle_{foton} \otimes |1\rangle_{detektor}. \tag{1.8б}$$

У случају да је $c_l = 1$, у питању је класично слична, *детерминистичка*, ситуација у којој нема квантних суперпозиција стања (интерференције), као ни „редукције стања“, тј., пресликавања *претпостављеног* овим задатком:

$$|\varphi\rangle = c_l|leva\,putanja\rangle_{foton} + c_d|desna\,putanja\rangle_{foton} \rightarrow |leva\,putanja\rangle_{foton}, \tag{1.8в}$$

са вероватноћом $|c_l|^2 = \langle\varphi|P_l|\varphi\rangle$. Само у класично-детерминистичкој ситуацији, или у оквиру неважења унитарности за динамику сложеног система, се може рећи да фотон није интераговао са детектором. Одсуство интеракције фотона и детектора би водило потпуно независним динамикама фотона и детектора и отуда неуспостављању корелаација између њих, то јест, неважењу израза (1.8б,в). Инструктивно је дати информатичку слику горњег унитарног пресликавања. У квантној информатици, унитарно прелисикавање (1.8б) је, тзв., двокубитна CNOT (XOR) логичка капија, која ради на следећи начин (у терминима нашег задатка): ако је стање фотона $|leva\,putanja\rangle_{foton}$, стање детектора остаје непромењено, а ако је стање $|desna\,putanja\rangle_{foton}$, стање детектора се мења. Тако CNOT пресликавање има могућност увођења квантне сплетености (истакнуте изразом (1.8б)), те је очекивано да је једна од основних квантних логичких пресликавања (квантних логичких „капија“). Наравно, овакво функционисање капије подразумева, *макар споља изазвану*, интеракцију фотона и детектора.

1.9 Доказати да се предиктивним неселективним мерењем фон Нојманова ентропија система не може смањити.

Решење: Задатак је доказати да пресликавање:

$$\rho \to \rho' = \sum_i P_i \, \rho P_i \qquad (1.9а)$$

има за последицу:

$$S(\rho') \geq S(\rho). \qquad (1.9б)$$

У теорији квантне информације важи (тзв., Клајнова) неједнакост [3]:

$$tr\big(\rho \, log_2(\rho)\big) - tr\big(\rho \, log_2(\sigma)\big) \geq 0, \qquad (1.9в)$$

за било која два статистичка оператора ρ и σ. Стављајући горње ρ' уместо σ:

$$tr\big(\rho \, log_2(\rho)\big) - tr\big(\rho \, log_2(\rho')\big) \geq 0. \qquad (1.9г)$$

Очигледно важи: $\rho \, log_2(\rho') = (\sum_n P_n)\big(\rho \, log_2(\rho')\big) = (\sum_n P_n^2)\big(\rho \, log_2(\rho')\big)$. Узимајући траг од овог израза и користећи комутативност испод трага: $tr\left((\sum_n P_n^2)\big(\rho \, log_2(\rho')\big)\right) = tr(\sum_n P_n \, \rho \, log_2(\rho') P_n)$. Како важи $[\rho', P_n] = 0, \forall n$, $\rho' P_n = P_n \rho' P_n = P_n \rho'$, па следи и $[log_2(\rho'), P_n] = 0, \forall n$. Отуда:

$$tr\big(\rho \, log_2(\rho')\big) = tr\big(\sum_n P_n \, \rho \, P_n log_2(\rho')\big) = tr\big(\rho' \, log_2(\rho')\big) = -S(\rho'). \qquad (1.9д)$$

Сменом у горњу неједнакост се добија:

$$0 \leq -S(\rho) - \big(-S(\rho')\big), \qquad (1.9ђ)$$

што је тврдња задатка. Сада се још лако види да знак једнакости важи ако и само ако је $\rho = \rho'$.

НАПОМЕНА: Уочити да замена ρ и ρ' не води обрнутом закључку, јер у последњем кораку би дала неједнакост, $\sum_n P_n \, log_2(\rho) P_n \neq log_2(\sum_n P_n \, \rho P_n)$. Постоје врсте квантних мерења, тзв., уопштена мерења, за која овај став не важи [3]; ипак видети Задатак 1.10. Још кратак доказ да је максимална ентропија она за коју су једнаки сви чиниоци, $p_i = const, \forall i$. Задатак је наћи максимум ентропије, и може се користити поступак непознатог множиоца, тј., тражити скуп $\{p_i\}$ који даје максималну ентропију: $f \equiv -\sum_i (p_i log_2 p_i -$

$ap_i)$. Услов максимума, ${}^{df}/_{dt} = 0$ води једначини: $-(log_2 p_i + 1 - a) = 0$, што очигледно захтева једнакост свих p_i-ова. Општији поступак, са два непозната множиоца, може се наћи у уџбеницима статистичке физике (што под одређени условима води „канонској расподели“[4]).

1.10 Доказати да се уопштена квантна мерења своде на пројективна мерења.

Решење: Уопштена мерења дефинишу се скупом оператора [3], M_m, који задовољавају услов $\sum_m M_m^+ M_m = I$, када је коначно стање мерења (селективна варијанта) дато изразом:

$$\frac{1}{\|M_m|\varphi\rangle\|} M_m|\varphi\rangle, \tag{1.10а}$$

а вероватноћа добијања резултата m износи: $\langle\varphi|M_m^+ M_m|\varphi\rangle$.

Размотримо сада проширење система: Хилбертов простор мерења се тензорски множи са простором стања другог система којег ћемо звати „апарат“. Како се предиктивна мерења (фон Нојманова теорија) моделују *унитарним* пресликавањем: $|\varphi\rangle_S|0\rangle_A = \sum_i c_i\,|i\rangle_S|0\rangle_A \to \sum_i c_i\,|i\rangle_S|i\rangle_A$, исту схему можемо применити на „објекат уопштеног мерења + апарат“ да добијемо (ненормирано стање): $|\varphi\rangle_S|0\rangle_A \to \sum_m (M_m\,|\varphi\rangle_S)|m\rangle_A$, где и овде апарат памти стања, а стања апарата чине ОНБ. У операторском облику ово гласи:

$$U|\varphi\rangle_S|0\rangle_A = \sum_m M_{Sm}|\varphi\rangle_S \otimes |m\rangle_A\,, \tag{1.10б}$$

што сада очигледно даје:

$$\langle\psi|_S\langle 0|_A U^+ U|\varphi\rangle_S|0\rangle_A = \sum_{m,m'}\langle m|m'\rangle_A\,\langle\psi|M_{Sm}^+ M_{Sm'}|\varphi\rangle_S = \sum_m\langle\psi|M_{Sm}^+ M_{Sm}|\varphi\rangle_S = \langle\psi|\varphi\rangle_S, \tag{1.10в}$$

што је дефинициони израз за *унитарност* оператора U.

---

[4] “Problems in thermodynamics and statistical physics”, ed. P.T. Landsberg, Pion, London (UK), 1971.

Сада размотримо пројективно, селективно мерење, на „апарату“, задато пројектором $I_S \otimes P_m$ где, без губљења општости, $P_m = |m\rangle\langle m|$. Тада, по постулату о пројективним мерењима (Задатак 1.7), коначно стање целине је дефинисано пресликавањем:

$$U|\varphi\rangle_S|0\rangle_A \rightarrow \frac{I_S \otimes P_m\, U|\varphi\rangle_S|0\rangle_A}{\sqrt{\langle\varphi|\langle 0|U^+(I_S \otimes P_m)\, U|\varphi\rangle|0\rangle}} = \frac{M_{Sm}|\varphi\rangle_S \otimes |m\rangle_A}{\sqrt{\langle\varphi|M_{Sm}^+ M_{Sm}|\varphi\rangle}},$$

(1.10г)

а тиме је коначно стање апарата $|m\rangle_A$, док је стање објекта мерења $\frac{M_{Sm}|\varphi\rangle_S}{\sqrt{\langle\varphi|M_{Sm}^+ M_{Sm}|\varphi\rangle}}$, у складу са постулатом (тј., дефиницијом) уопштених квантних мерења. Тиме је доказана тврдња задатка: унитарна динамика (на проширеном систему) и пројективно мерење (на апарату) су довољни за уопштено мерење на систему.

НАПОМЕНА: Могућност да се све ово тиче неког посебно одабраног подпростора објекта мерења, или целине „објект+апарат“, не мења закључак, већ све своди на задати подпростор од интереса – тада је U *унитарна редукција унитарног пресликавања на проширеном систему*; у општем случају, редукција унитарног оператора не мора бити унитарни оператор, али је свакако изометричка (сачувава норму вектора). Проширење оператора U на унитарни на целом простору је славни фон Нојманов доказ у његовој теорији квантног мерења, а иначе се може у мање строгом виду наћи на многим местима, нпр., [3].

1.11 Доказати да унитарна динамика „(отворени) систем+окружење“ води Краусовом облику динамике за отворени (под)систем ако је почетно стање облика тензорског производа.

Решење: Како се сваки оператор, па и унитарни, може развити по базису алгебре оператора двочестичног система у облику $U(t, t_0) = \sum_{m,n} u_{mn}(t, t_0)\, A_{Sm} \otimes B_{En}$, уз спектралну форму $\rho_E = \sum_k \rho_k\, |k\rangle_E\langle k|$ и почетно стање $\rho_S(t_0) \otimes \rho_E(t_0)$, израз (12), из теоријског увода, за динамику отвореног система добија облик (уз изостављено писање временских тренутака – осим на самом крају):

$$\begin{gathered}\rho_S(t) = \sum_{i,k} \rho_k \langle i|_E \left(\sum_{m,n,m',n'} u_{mn}\, u^*_{m'n'} A_{Sm} \rho_S A^+_{Sm'} \otimes B_{En}|k\rangle_E \langle k|B^+_{En'}\right)|i\rangle_E = \\ \sum_{i,k} \rho_k \left(\sum_{m,n,m',n'} u_{mn}\, u^*_{m'n'} A_{Sm} \rho_S A^+_{Sm'} \langle i|_E B_{En}|k\rangle_E \langle k|B^+_{En'}|i\rangle_E\right) = \\ \sum_{i,k} \rho_k \left(\sum_{m,n} u_{mn}\, A_{Sm} \langle i|_E B_{En}|k\rangle_E\right) \rho_S \left(\sum_{m',n'} u^*_{m'n'}\, A^+_{Sm'} \langle k|B^+_{En'}|i\rangle_E\right) = \\ \sum_i \sum_k \left(\sqrt{\rho_k} \sum_{m,n} u_{mn}\, A_{Sm} \langle i|_E B_{En}|k\rangle_E\right) \rho_S \left(\sqrt{\rho_k} \sum_{m',n'} u^*_{m'n'}\, A^+_{Sm'} \langle k|B^+_{En'}|i\rangle_E\right) \equiv \\ \sum_p K_{Sp}(t,t_0)\, \rho_S(t_0) K^+_{Sp}(t,t_0), \qquad \text{(1.11а)}\end{gathered}$$

где су уведени Краусови оператори:

$$K_{Sp}(t,t_0) \equiv \sqrt{\rho_k(t_0)} \sum_{m,n} u_{mn}\,(t,t_0) A_{Sm} \langle i|_E B_{En}|k\rangle_E, \qquad \text{(1.11б)}$$

за сваку комбинацију, $p \equiv (i,k)$. Постојање реалних $\sqrt{\rho_k}, \forall k$, је последица позитивности (позитивне-семидефинитности) статистичког оператора $\rho_E(t_0)$.

Израз (1.11б) истиче унитарну слободу у избору Краусових оператора. Уведимо нове операторе Q_l изразима:

$$K_k = \sum_l v_{kl}\, Q_l, \qquad \text{(1.11в)}$$

тако да $v = (v_{kl})$ представља унитарну матрицу, када важи $\sum_k v_{kl}\, v^*_{kl'} = \delta_{ll'}$. Сада сменом (1.11в) у (1.11а):

$$\begin{gathered}\sum_k K_k\, \rho K^+_k = \sum_k \left(\sum_l v_{kl}\, Q_l\right) \rho \left(\sum_{l'} v^*_{kl'}\, Q^+_{l'}\right) = \sum_{l,l'} \left(\sum_k v_{kl}\, u^*_{kl'}\right) Q_l \rho Q^+_{l'} = \\ \sum_l Q_l\, \rho Q^+_l. \qquad \text{(1.11г)}\end{gathered}$$

Код Марковљевих процеса, дисипатор исказује ову унитарну слободу:

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_i \gamma_i \left(A_i \rho A^+_i - \frac{1}{2}\{A^+_i A_i, \rho\}\right) = \sum_l \gamma'_l \left(B_l \rho B^+_l - \frac{1}{2}\{B^+_l B_l, \rho\}\right), \ \text{(1.11д)}$$

ако важи аналогон (1.11в):

$$\sqrt{\gamma_i} A_i = \sum_l u_{il} \sqrt{\gamma'_l} B_l. \qquad \text{(1.11ђ)}$$

Аналогија (1.11ђ) и (1.11в) говори да је доказ (1.11д), сменом (1.11ђ) у (1.11д), аналоган доказу (1.11г).

НАПОМЕНА: Овиме је дат *довољан* услов за Краусов (интегрални) облик закона кретања, тј., потпуну позитивност динамике отвореног система S. Стоји и обрнуто: Краусов облик је довољан услов да, за унитарну динамику целине, $S+E$, почетно стање буде облика тензорског производа [2]. Ово је заправо теорем који у литератури има различите називе, а често нема никакав назив [2]. Како је тензорски производ стања *једини облик стања које нема корелација подсистема* (овде: отвореног система S и окружења E), то, свеукупно, стоји: било какве (класичне, или квантне – квантни дискорд, или само квантна сплетеност) *корелације у изолованом систему, $S+E$, воде неважењу Краусовог облика*, тј., *воде непотпуно позитивној динамици отвореног система S* [2]. Најопштији интегрални облик закона кретања отвореног система је облика: $\sum_m K_{Sm}\big(t,t_0,\rho_S(t_0)\big)\,\rho_S(t_0)K^+_{Sm}\big(t,t_0,\rho_S(t_0)\big)$, где Краусови оператори зависе од почетног стања што, наравно, динамику чини *нелинеарном* [2]. Наравно, може се десити да, за неки посебан скуп почетних стања, сви Краусови оператори буду независни од почетног стања из *тог* скупа. Тада јесте испуњена Краусова форма (тј. ПП-вост динамике отвореног система), али *само на том домену* динамичког пресликавања, што није динамика УДП врсте (Дефиниција 25).

1.12 Доказати да свака интеракција уводи квантну сплетеност (енг.: *entanglement*) чистог стања за системе у интеракцији.

Решење: Без губљења општости (упоредити са Задатком 1.15), размотримо динамику коју генерише интеракциони хамилтонијан облика $H_{int}=A_1\otimes B_2$, где се појављују ермитски оператори, за системе 1 и 2 (у Шредингеровој слици):

$$U|\varphi\rangle_1|0\rangle_2 = e^{-itA_1\otimes B_2/h}\sum_i c_i\,|i\rangle_1|0\rangle_2 = \sum_{i,m,n} c_i e^{-ita_{1m}b_{2n}}P_{1m}\,|i\rangle_1\otimes Q_{2n}|0\rangle_2 = \sum_{i,m,n} c_i e^{-ita_{1m}b_{2n}}\delta_{im}\,|i\rangle_1\otimes Q_{2n}|0\rangle_2 = \sum_i c_i\,|i\rangle_1\otimes \Big(\sum_n e^{-ita_{1i}b_{2n}}\,Q_{2n}|0\rangle_2\Big) = \sum_i c_i\,|i\rangle_1\otimes U_{2i}(t)|0\rangle_2 \equiv \sum_i c_i\,|i\rangle_1\otimes|\chi_i(t)\rangle_2. \quad (1.12a)$$

Коришћене су спектралне форме, $A_1=\sum_m a_{1m}\,P_{1m}$ и $B_2=\sum_n b_{2n}\,Q_{2n}$, а базис $|i\rangle_1$ је својствени за A_1, па стога само један пројектор сачувава вектор: $P_{1m}|i\rangle_1=\delta_{im}|i\rangle_1$. Наравно, $U_{2i}(t)=\sum_n e^{-ita_{1i}b_{2n}}\,Q_{2n}=e^{-ita_{1i}B_2/h}$. Исти индекс i у коначном стању целине говори о корелацији стања два система, 1 и 2, тј., говори о чињеници да ово стање више није тензорски производ стања подсистема 1 и 2, иако је то било у почетном тренутку. Добијени облик стања не мора да представља Шмитову канонску форму – што је предмет следећег задатка.

Уопштење задатка на мешана стања је праволинијско и води закључку: свака интеракција води квантним корелацијама мешаних стања подсистема изоловане целине.

НАПОМЕНА: Интеракција електрона и протона у водониковом атому уводи сплетеност[5]. Наиме, ако важи $I \equiv I_e \otimes I_p = \left|\vec{r}_e \otimes I_p - I_e \otimes \vec{r}_p\right| \cdot \left|\vec{r}_e \otimes I_p - I_e \otimes \vec{r}_p\right|^{-1}$ и, по дефиницији,

$$\left|\vec{r}_e \otimes I_p - I_e \otimes \vec{r}_p\right| = \int d^3\vec{r}_e\, d^3\vec{r}_p \left|\vec{r}_e - \vec{r}_p\right| \cdot |\vec{r}_e\rangle\langle\vec{r}_e| \otimes |\vec{r}_p\rangle\langle\vec{r}_p|, \qquad (1.12б)$$

тада лако следи операторски део Кулонове интеракције као уопштење[6] општег типа разматраног у овом задатку:

$$\left|\vec{r}_e \otimes I_p - I_e \otimes \vec{r}_p\right|^{-1} = \int d^3\vec{r}_e\, d^3\vec{r}_p \left|\vec{r}_e - \vec{r}_p\right|^{-1} \cdot |\vec{r}_e\rangle\langle\vec{r}_e| \otimes |\vec{r}_p\rangle\langle\vec{r}_p|. \qquad (1.12в)$$

Због сплетености електрона и протона, Шредингерова једначина за водоников атом се решава за друге подсистеме – за центар маса + „релативна честица“ -- који не интерагују и тиме је математички остварена „сепарација варијабли“. Зато је, наравно, квантна теорија водониковог (и свих других) атома заправо теорија спољашњег (балистичког) кретања центра маса атома, и унутрашњих степена слободе који имају дискретан спектар енергије. Другим речима: строго говорећи, о електрону и протону у водониковом атому (везана стања) не знамо много[7].

1.13 Под којим условима стања другог подсистема из претходног задатка могу бити приближно ортогонална?

Решење: Занимају нас скаларни производи стања система 2 које се обично називају „амплитудом корелација“:

$$\left\langle \chi_i(t) \middle| \chi_j(t) \right\rangle = \left\langle 0 \middle| e^{ita_{1i}B_2/h} e^{-ita_{1j}B_2/h} \middle| 0 \right\rangle. \qquad (1.13а)$$

Уведимо неки ОНБ који је својствени за B_2, $B_2|\alpha\rangle_2 = b_\alpha|\alpha\rangle_2$ и искористимо разлагање јединице, $\sum_\alpha |\alpha\rangle_2 \langle\alpha|$:

---

[5] M. Dugić, Physica Scripta **53**, 9 (1996).

[6] M. Dugić, Phys. Scripta **56**, 560 (1997).

[7] J. Jeknić-Dugić et al, Open Access Libr. **1**, e501 (2014).

$$\left\langle \chi_i(t) \middle| \chi_j(t) \right\rangle = \left\langle 0 \middle| e^{ita_{1i}B_2/h} \sum_\alpha |\alpha\rangle_2 \, \langle \alpha| e^{-ita_{1j}B_2/h} \middle| 0 \right\rangle =$$
$$\sum_\alpha e^{-it(a_{1j}-a_{1i})b_\alpha/h} \, |\langle \alpha | 0 \rangle|^2. \qquad (1.13б)$$

За сва стања из базиса система 1 која одговарају истој својственој вредности a_{1i}, укључујући и дијагоналне елементе (за исти индекс i), тј., за сва стања која припадају истом својственом подпростору опсервабле A_1 (видети Задатак 1.12), горњи скаларни производи су временски независни и једнаки 1 – јер је тада $\sum_\alpha e^{-it(a_{1j}-a_{1i})b_\alpha/h} \, |\langle \alpha|0\rangle|^2 = \sum_\alpha |\langle \alpha|0\rangle|^2 = 1.$ Зато размотримо вандијагоналне елементе, тј., скаларне производе стања која припадају различитим својственим подпросторима опсервабле A_1.

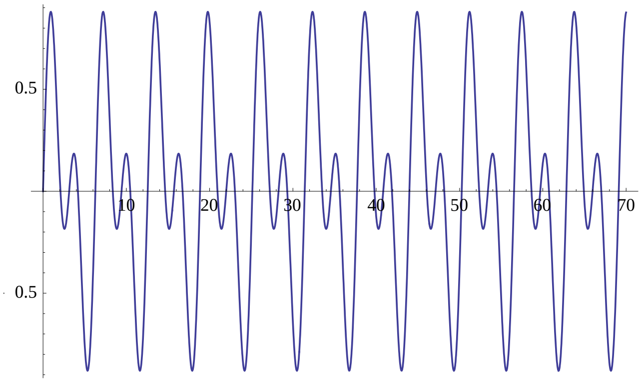
У математици су познате функције типа (1.13б), у општијем облику:

$$\sum_\alpha p_\alpha e^{-it\omega b_\alpha/h}, 0 \leq p_\alpha \leq 1, \sum_\alpha p_\alpha = 1 \qquad (1.13в)$$

и називају се „скоро периодичним функацијама (СПФ)“, са главном особином да по апсолутној вредности теже нули када параметар (тј., време) $t \to \infty$. Детаљи у вези са овим се могу наћи у[8].

И реални, и имагинарни део а,плитуде корелација (тј., СПФ) има исту особину – утрнуће у бесконачно великом времену. Као илустрацију дајемо следеће графике:

(а) два сабирка (синусна, тј., имагинарни члан СПФ, оба p_α иста)



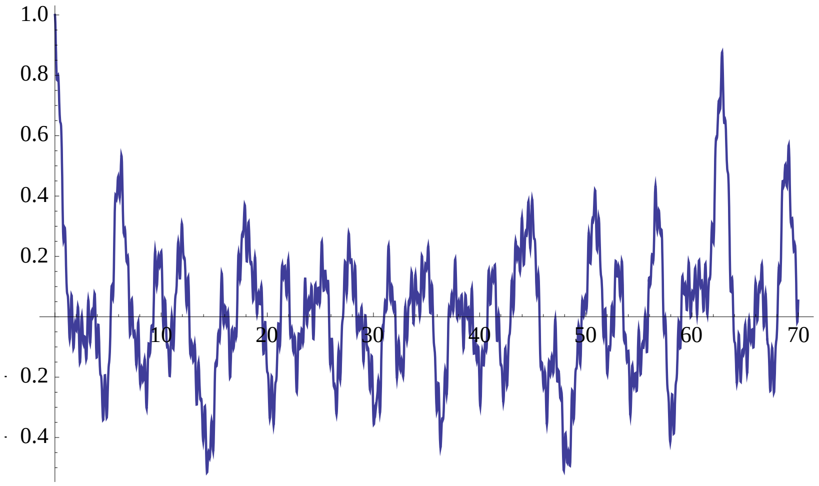
Слика 1.7 Израз (1.13в) за два једнака сабирка.

---

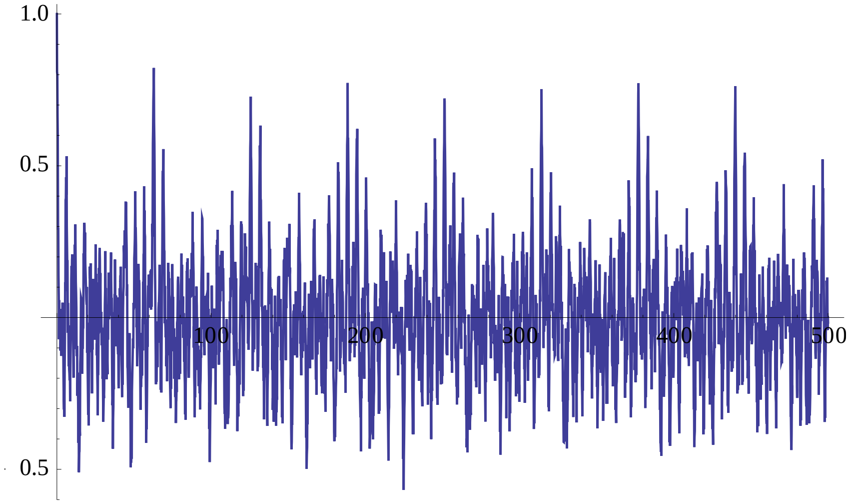
[8] W. H. Zurek, Phys. Rev. D **26**, 1862 (1982).

што је периодична функција која (периодично) достиже почетну вредност 1;

(б) двадесет сабирака (косинусни, тј. реални део СПФ, сви p_α исти)



Слика 1.8 Израз (1.13в) за 20, међусобно једнаких, сабирака за интервал времена $t \in [0{,}70]$.



Слика 1.9 Израз (1.13в) за 20, међусобно једнаких, сабирака за интервал времена $t \in [0{,}100]$.

где се види да се период појављивања почетне вредности, која износи 1, продужава, као и да се вредност збира смањила у односу на два сабирка, тј., да за највећи број тренутака (апсолутна) вредност СПФ је око 0.2.

Дакле, за врло велики број сабирака, у највећем „броју тренутака“ ће апсолутна вредност СПФ, а отуда и разматраних скаларних производа, бити врло мала, са веома дугим периодом понављања почетне вредности.

Примењено на чисто стање целине, $\sum_i c_i \, |i\rangle_1 \otimes |\chi_i(t)\rangle_2$: стање подсистема 1, које је у почетном тренутку било чисто и некорелисано са подсистемом 2, сада је корелисано и, као „мешавина друге врсте“ (енг.: *improper mixture*), гласи:

$$\rho_1 = tr_2\left(\left(\sum_i c_i \, |i\rangle_1 \otimes |\chi_i(t)\rangle_2\right)\left(\sum_i c_i \, |i\rangle_1 \otimes |\chi_i(t)\rangle_2\right)^+\right) =$$
$$\sum_{i,j} c_i c_j^* \left\langle \chi_j(t) \middle| \chi_i(t) \right\rangle \; |i\rangle_1 \langle j|. \tag{1.13г}$$

Матрични елементи сада имају облик:

$$\rho_{1ij}(t) = c_i c_j^* \left\langle \chi_j(t) \middle| \chi_i(t) \right\rangle, \tag{1.13д}$$

тј., своде се на скоро периодичне функције. Памтећи дефиницију $|\chi_i(t)\rangle_2 = e^{-ita_{1i}B_2/h}|0\rangle_2$, може се закључити:

(1) За сва стања у истом својственом подпростору опсервабле A_1, све вредности остају исте са протоком времена (већ утврђено изнад), док

(2) За сва стања која не припадају истом својственом подпростору за A_1, скаларни производ стања система 2, симболично исказани закључци потекли од Слика 1.7-1.9, задовољава:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\left\langle \chi_i(t) \middle| \chi_j(t) \right\rangle\right| = 0. \tag{1.13ђ}$$

Примењено на стање подсистема 1 (отвореног система):

$$\lim_{t\to\infty} \rho_{1ij}(t) = 0, i \neq j, \tag{1.13е}$$

са почетном вредношћу $\rho_{1ij}(0) = c_i c_j^*$ (што одговара $\left\langle \chi_i(0) \middle| \chi_j(0) \right\rangle = 1$). Тако се, *овде истакнути*, вандијагонални чланови смањују са временом, а период повратка на почетну вредност (а тиме и на почетно стање целине) - што се назива *„рекуренцијом“* - продужава са повећањем броја сабирака.

Наравно, број сабирака у (1.13г) је „сразмеран“ величини Хилбертовог простора подсистема 2. Отуда, ако (под)систем 2 представља окружење (под)система 1, *велико окружење* (многочестично окружење) ефективно уводи *суперселекциона правила* за стања система 1, са *веома дугим* *временом рекуренције*. Суперселекциона правила се јасно уочавају у матричном запису стања отвореног система *у (било ком) својственом базису* опсервабле A_1: матрични запис је очигледно блок-дијагоналан, тј., на дијагонали су блокови, тј., подматрице, са (временски неизмењеним) почетним вредностима $c_i c_j^*$, док се ван тих блокова налазе вандијагонални чланови за које важи утрнуће за довољно дугачко време и, за велико окружење, веома дуго време рекуренције:

$$\begin{pmatrix} & \cdots & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix}; \tag{1.13ж}$$

три тачкице се тичу вандијагоналних елемената који временом трну, док (непопуњене) подматрице на дијагонали су све непромењене временом; ранг подматрица указује на димензије појединих својствених подпростора (тј., на дегенерацију одговарајућих својствених вредности) опсервабле A_1.

Све ово важи само за својствене базисе опсервабле A_1, и ни за један други ОНБ у простору стања – што се лако проверава. Зато се (сваки) својствени базис ове опсервабле назива *„базисом бројача“*, а сама опсервабла „опсерваблом бројача“ – енг.: “*pointer basis*”, и “*pointer observable*”, редом.

Не може се пренагласити: разматрани вандијагонални (ван блокова, представљени тачкицама) чланови матрице су *носиоци квантне кохеренције чистих квантних стања изучаване у Задацима 1.1-1.3* – у овом случају (под)система 1. Одсуство квантне кохеренције је *потребан услов класичности физичких система*, па се зато каже да базис бројача, тј., опсервабла бројача, представљају *носиоце класичних особина отвореног* система 1 – тј., да је систем 1 *„декохериран“*. Горња матрица илуструје да је, за већину временских тренутака, у врло дугом времену, за велико окружење.

2) стање отвореног система мешано, тј., није чисто стање, $\rho_1 \neq \rho_1^2$.

Сада се може преписати стање целине, $\sum_i c_i \, |i\rangle_1 \otimes |\chi_i(t)\rangle_2$, у другачији облик усклађен са матричним записом:

$$\sum_i e_i \left(\sum_{\alpha=1}^{g_i} d_{i\alpha} \, |\alpha\rangle_1\right) \otimes |\chi_i(t)\rangle_2 \equiv \sum_i e_i |\varphi_i\rangle_1 \otimes |\chi_i(t)\rangle_2, \qquad (1.13з)$$

где $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$, g_i представља дегенерацију a_i-те својствене вредности опсервабле A_1, па суме по α представљају суперпозиције стања која сва припадају својственом подпростору за a_i; наравно, сада збир по i, десна страна горњег израза, пребројава својствене подпросторе опсервабле A_1, а не, као у почетном запису стања целине, стања из базиса подсистема 1. За стања окружења, $|\chi_i(t)\rangle_2$, важи горе уочена (приближна) ортогоналност. Тако нови запис стања целине представља (приближну) Шмитову канонску форму која важи за већину временских тренутака, у врло дугом интервалу времена.

НАПОМЕНА: Иако се формално узима лимес бесконачног времена, прорачуни за различите моделе дају *коначно време* за које је испуњено појављивање ефективних суперселекционих правила за отворени (под)систем 1. То коначно време се назива *„временом декохеренције"* и износи, нпр., 1s за слободни електрон, док за честицу прашине (димензија 0.1mm) време декохеренције износи 10^{-20}s, а за куглашку лопту, чак, 10^{-28}s – и све то за исто окружење којег чини сунчева светлост. Овде је опсервабла бројача положај система. Разлике у временима декохеренције потичу, како од масе отвореног система, тако и од просторне величине, која дефинише јачину интеракције са окружењем – обично јачина интеракције са окружењем расте са просторном величином отвореног система – што у горњим разматрањима није експлицитно наведено, а могло би се увести „скалирањем" интеракције, тј., увођењем јачине интеракције у моделу: $H_{int} = gA_1 \otimes B_2$, уместо израза $H_{int} = A_1 \otimes B_2$ уведеног у претходном задатку[9].

1.14 Доказати да у континуалном лимесу, амплитуда корелације престаје да буде скоро периодична функција, и да у лимесу бесконачног времена егзактно тежи нули без „рекуренције".

---

[9] M. Tegmark, Found. Phys. Lett. **6**, 571 (1993).

Решење: Амплитуда корелације из претходног задатка је скоро периодична функција, израз (1.13в):

$$\sum_\alpha p_\alpha e^{-it\omega_{ij}b_\alpha/h}, 0 \leq p_\alpha \leq 1, \sum_\alpha p_\alpha = 1. \tag{1.14а}$$

Сада претпоставимо да је спектар B_2 непрекидан, тј., уместо b_α ставимо само b, а уместо вероватноћа p_α густину вероватноће $p(b)$. Како се вероватноће сабирају у јединицу, за нове функције (густине вероватноће) стоји услов интеграбилности, $\int p(b)\,db = 1$. Тада амплитуда корелације добија облик:

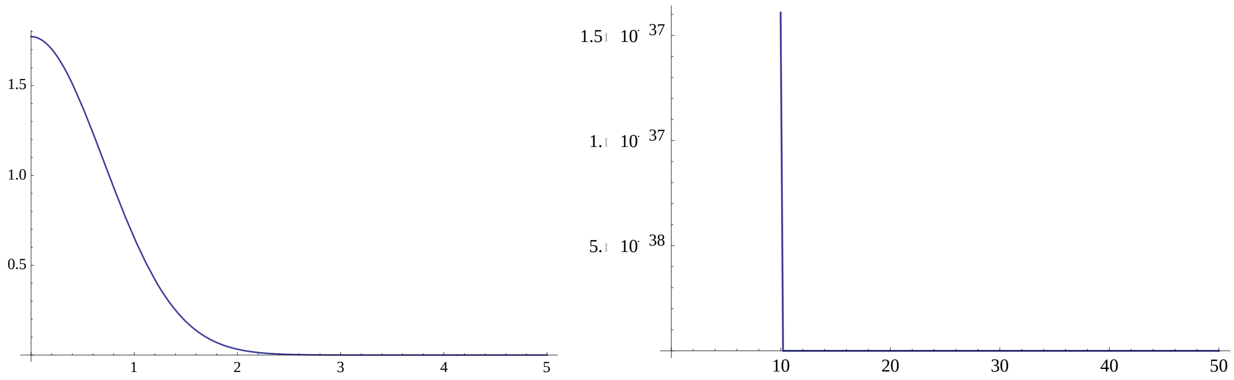
$$f_{ij}(t) = \int p(b)\, e^{-it\omega_{ij}b/h} db, \tag{1.14б}$$

за коју следи став изражен задатком. Наиме, непосредна примена, тзв., Риман-Лебегове леме даје:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int p(b)\, e^{-it\omega_{ij}b/h} db\right) = 0, \forall \omega_{ij} \neq 0, \tag{1.14в}$$

где интеграција, као и у изразу (1.14б), подразумева границе интеграљења на којима је $p(b)$ интеграбилно (дакле, резултат важи и за шири скуп резултата, тј., $p(b)$ не мора нужно бити густина вероватноће да би резултат важио).

Ради поређења са графицима за скоро периодичне функције из претходног задатка, одаберимо (ненормирани) гаусијан $p(b) = e^{-b^2}, b \in (-\infty, \infty)$, и $\omega_{ij}/h = \pm 2$, одакле следи Слика 1.10 за функцију $f_{ij}(t)$ са увећањем времена (водоравна оса):



Слика 1.10 Илустрација израза (1.14в) за два временска интервала, $t \in [0,5]$ и $t \in [0,50]$, са лева на десну страну графика.

Графици јасно указују да, за разлику од скоро периодичних функција (претходни задатак), овде има само монотоног (глатког) опадања са протоком времена – то јест, нема повратка (рекуренције) почетног стања.

Тада стање окружења из претходног задатка, $|\chi_i(t)\rangle_2 = e^{-ita_{1i}B_2/h}|0\rangle_2$, поприма облик (за $B_2 = \int db\, b|b\rangle_2\langle b|$):

$$|\chi_i(t)\rangle_2 = \int db\, \langle b|0\rangle_2\, e^{-ita_{1i}b/h}|b\rangle_2,$$

па се израз (1.13з) монотоно у времену (тј., *без рекуренције*) приближава Шмитовој канонској форми по свом облику.

НАПОМЕНА: Аналогни резултат за, тзв., корелационе функције, у лимесу слабе интеракције (уз важење, тзв., Дејвисовог теорема) води важењу „секуларне апроксимације“ (тј., “*rotating wave aproximation*”) у формализму мастер једначина, па отуда и Линдбладовом облику мастер једначине (тј., Марковљевости динамике) отвореног система. Непрекидност спектра (овде: опсервабле B) је уједно и *једини начин да се избегне рекуренција* [2].

1.15 Доказати да израз (1.12а) следи само ако је интеракциони хамилтонијан дијагонализабилан у базису бројача, тј., да израз $\langle j|H_{int}|i\rangle_1 = 0, i \neq j$ представља потребан услов за (1.12а), тј., за декохеренцију.

Решење: Израз (1.12а) гласи:

$$U|\varphi\rangle_1|0\rangle_2 = \left(I - \frac{it}{h}H_{int} + \frac{1}{2}\left(-\frac{it}{h}H_{int}\right)^2 + \cdots\right)\sum_i c_i\, |i\rangle_1|0\rangle_2 \equiv \sum_i c_i\, |i\rangle_1 \otimes |\chi_i(t)\rangle_2. \qquad (1.15\text{а})$$

Скаларно множећи са неким вектором $|j\rangle_1$ из базиса бројача добија се:

$$\sum_i c_i\, \langle j|_1 \left(I - \frac{it}{h}H_{int} + \frac{1}{2}\left(-\frac{it}{h}H_{int}\right)^2 + \cdots\right)|i\rangle_1|0\rangle_2 \equiv c_j|\chi_j(t)\rangle_2. \qquad (1.15\text{б})$$

Како (1.15б) мора важити за сваки скуп константи c_i (тј., за свако почетно $|\varphi\rangle_1$ - али и за свако почетно $|0\rangle_2$), скуп услова је бесконачан, тј., непребројив. Отуда следи услов $\langle j|_1 \left(I - \frac{it}{h}H_{int} + \frac{1}{2}\left(-\frac{it}{h}H_{int}\right)^2 + \cdots\right)|i\rangle_1 = 0, \forall i \neq j$.

Линеарна независност чланова са различитим степеном времена, t^n, имплицира услов за $i \neq j$:

$$\langle j|H_{int}^n|i\rangle_1 = 0, \forall n = 0,1,2,3,4, \ldots, \qquad (1.15в)$$

што је, опет, бесконачан скуп услова. Ипак, ако је испуњено за $n = 1$, непосредно следи да је испуњено и за $n = 2$, тј., $\left\langle j\middle|H_{int}^2\middle|i\right\rangle_1 = \sum_k \langle j|H_{int}|k\rangle_1 \langle k|H_{int}|i\rangle_1 = 0, \forall i \neq j$, па отуда и за свако n. Тако са леве стране (1.15б) преостаје само члан када је $i = j$, када (1.15б) може бити задовољено. Тиме је став задатка потврђен.

НАПОМЕНА: Дијагонализабилност, $\langle j|H_{int}|i\rangle_2 = 0, i \neq j$, је *услов који дефинише базис бројача*, а дегенерација дефинише суперселекционе секторе. Иако је ово потребан услов, није и довољан услов за (1.12а)—тј., за декохеренцију—јер пуни услов захтева, поред интеракцијоног хамилтонијана, и сопствене хамилтонијане, тј., цео хамилтонијан изолованог система „систем+окружење“ у горњим изразима. Коначно, само приближно, а не егзактно, важење дијагонализабилности уводи приближни базис бројача, који не мора бити ортонормиран, а може бити и прекомплетан - таква су, нпр., гаусијанска стања минималне неодређености (упоредити са Задатком 3.19, као и Задатком 4.24). Штавише, приближни базис бројача је типична ситуација, с обзиром на то да интеракциони и сопствени хамилтонијан отвореног система, типично, међусобно не комутирају[10].

1.16 Нека је интеракциони хамилтонијан задат у општем облику: $H_{int} = \sum_\alpha A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha}$, где се појављују само ермитски оператори, који нису међусобно линеарно зависни. Које услове сада на интеракциони хамилтонијан успоставља његова дијагонализабилност у базису бројача?

Решење: Задати облик интеракције је најопштији облик — ако је H_{int} задато преко скупа линеарно зависних оператора, то се непосредно елиминише линеарна зависност и поприма други запис H_{int} истог општег облика: нпр., нека у запису $\sum_{\alpha'} A'_{1\alpha'} \otimes B_{2\alpha'}$, неки $B_{2\alpha_0{}'} = \sum_\alpha m_{\alpha\alpha_0{}'} B_{2\alpha}$, заменом овога у

---

[10] М. Дугић, СФИН.

почетни израз следи општи израз $\sum_\alpha A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha}$, у којем се $B_{2\alpha_0{}'}$ више не појављује, а $A_{1\alpha} = A'_{1\alpha} + m_{\alpha\alpha_0{}'} A'_{1\alpha_0}$.

Сада услов дијагонализабилности, $\langle j|H_{int}|i\rangle_1 = 0, i \neq j$, поприма облик:

$$\langle j| \sum_\alpha A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha}|i\rangle_1 = 0, i \neq j, \quad (1.16а)$$

То јест,

$$\sum_\alpha \langle j|A_{1\alpha}|i\rangle \otimes B_{2\alpha} = 0, \forall\, i \neq j, \quad (1.16б)$$

што (с обзиром на линеарну независност $B_{2\alpha}$) води услову дијагонализабилности:

$$\langle j|A_{1\alpha}|i\rangle = 0, \forall\, i \neq j, \forall \alpha\ . \quad (1.16в)$$

Наравно, услов (1.16в) представља услов комутирања:

$$[A_{1\alpha}, A_{1\alpha'}] = 0, \forall \alpha, \alpha'. \quad (1.16г)$$

НАПОМЕНА: Опет вреди нагласити: приближно испуњен услов (1.16г) уводи приближни базис бројача.

1.17 Какве су последице по одвијање декохеренције некомутирања опсерабли система 2, тј., $[B_{2\alpha}, B_{2\alpha'}] \neq 0$ за макар неки пар индекса α, α'?

Решење: Одвијање процеса декохеренције захтева (подразумева) важење (1.13ђ), тј., да стања окружења постају приближно међусобно ортогонална после довољно дугог временског интервала. Ово је математички успостављено у оквиру формализма скоро периодичних функција. Изван овог оквира, одвијање процеса декохеренције није математички добро постављен задатак. То, наравно, не значи да не постоји општији оквир, већ само да такав оквир није до сада познат. Зато ћемо се овде држати оквира, *искључиво*, формализма скоро периодичних функција.

Сменом $H_{int} = \sum_\alpha A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha}$ у леву страну (1.13а), уместо десне стране овог израза следи:

$$\left\langle \chi_i(t) \middle| \chi_j(t) \right\rangle_2 = \left\langle 0 \middle| e^{it \sum_\alpha a_{1\alpha i} B_{2\alpha}/\hbar} \, I \, e^{-it \sum_\alpha a_{1\alpha j} B_{2\alpha}/\hbar} \middle| 0 \right\rangle_2, \tag{1.17а}$$

што због некомутирања у скупу оператора $B_{2\alpha}$ води закључку да у општем случају, (1.17а) није облика скоро периодичне функције, израз (1.13в) — који следи на основи разлагања јединичног оператора I по базису који је својствени за опсервабле окружења. Дакле, да би се појавио жељени облик (1.13в), *потребно* је да важи: $\left[\sum_\alpha a_{1\alpha i} B_{2\alpha}, \sum_\alpha a_{1\alpha j} B_{2\alpha}\right] = 0, \forall i, j$. Свакако да у бесконачнодимензионалном простору (отвореног система 1) то води скупу бесконачно много истовремено задовољених услова, тј., укупно, услов који не може бити испуњен. Само нека ограничења општег формализма претходних задатака, која овде неће бити даље изучавана, можда могу водити услову (1.13ђ). Искуство казује да таквих случајева практично нема међу коришћеним физичким моделима. Отуда се може рећи да је, *у овде постављеним методским оквирима*, комутирање:

$$[B_{2\alpha}, B_{2\alpha'}] = 0, \forall \alpha, \alpha', \tag{1.17б}$$

ефективно потребан услов за одвијање процеса декохеренције.

НАПОМЕНА: Интеракциони хамилтонијани за које важе услови (1.16г) и (1.17б) се називају (опсерваблама) *сепарабилне* врсте[11]. Занимљиво, *управо супротан услов* од услова сепарабилности интеракције се испоставља довољним условом за постојање једнозначног стационарног стања које је, истовремено, и АСС за хомогене Марковљеве процесе [2]. Физички, ово је очекивано: декохеренција подразумева „опсерваблу бројача“ која је „мерена“ од стране окружења и коначно стање је различито за различите опсервабле бројача и при томе још зависи од почетног стања. Са друге стране, асимптотско стање је једнозначно, тј., исто за свако почетно стање – ако је асимптотско стање Гибсово канонско стање, тиче се искључиво опсервабле сопствене енергије отвореног система.

---

[11] M. Dugić, Phys. Scripta **56**, 560 (1997); М. Дугић, СФИН.

1.18 Задато је неко чисто стање двочестичног система 1+2, $|\Psi\rangle$. Каква мерења се морају обавити да би се могло разликовати ово чисто, од аналогног, мешаног стања?

Решење: Нека је чисто стање задато у Шмитовој канонској форми, $|\Psi\rangle = \sum_k c_k\,|\mathrm{k}\rangle_1 \otimes |\mathrm{k}\rangle_2$. Тада је аналогно мешано стање: $\rho = \sum_k |c_k|^2\,|\mathrm{k}\rangle_1\langle k| \otimes |\mathrm{k}\rangle_2\langle k|$. Размотримо очекиване вредности за произвољну једночестичну, $A_1 \otimes I_2$, и произвољну двочестичну опсерваблу, $A_1 \otimes B_2$.

За чисто стање, очекивана вредност једночестичне опсервабле гласи:

$$\langle A_1 \otimes I_2\rangle = \langle\Psi|A_1 \otimes I_2|\Psi\rangle = \sum_{k,k'} c_{k'}\,c_k^*\langle k|_1\langle k|_2 A_1 \otimes I_2|\mathrm{k}'\rangle_1 \otimes |\mathrm{k}'\rangle_2 = \sum_k |c_k|^2\,\langle k|_1 A_1|\mathrm{k}\rangle_1. \qquad (1.18а)$$

За мешано стање се добија:

$$\langle A_1 \otimes I_2\rangle = tr(A_1 \otimes I_2\rho) = tr_1\left(\sum_k |c_k|^2\,A_1|\mathrm{k}\rangle_1\langle k|\left(tr_2\big(I_2|\mathrm{k}\rangle_2\langle k|\big)\right)\right) = \sum_k |c_k|^2\,\langle k|A_1|\mathrm{k}\rangle_1, \qquad (1.18б)$$

тј. добија се исти израз. Отуда је очигледан закључак да никакво подсистемско мерење не може да разликује дате врсте чистих и мешаних стања (уведених још у Задатку 1.1).

За случај двочестичног мерења се добијају следећи изрази:

$$\langle A_1 \otimes B_2\rangle = \langle\Psi|A_1 \otimes B_2|\Psi\rangle = \sum_{k,k'} c_k\,c_{k'}^*\langle k|_1\langle k|_2 A_1 \otimes B_2|\mathrm{k}'\rangle_1 \otimes |\mathrm{k}'\rangle_2 = \sum_{k,k'} c_k\,c_{k'}^*\langle k|_1 A_1|\mathrm{k}\rangle_1\langle k'|_2 B_2|\mathrm{k}'\rangle_2, \qquad (1.18в)$$

и

$$\langle A_1 \otimes B_2\rangle = tr(A_1 \otimes B_2\rho) = tr_1\left(\sum_k |c_k|^2\,A_1|\mathrm{k}\rangle_1\langle k|\left(tr_2\big(B_2|\mathrm{k}\rangle_2\langle k|\big)\right)\right) = \sum_k |c_k|^2\,\langle k|A_1|\mathrm{k}\rangle_1\langle k|B_2|\mathrm{k}\rangle_2. \qquad (1.18г)$$

Поређење последња два израза открива да разликовање стања захтева да обе опсервабле, A_1 и B_2, немају базисе, $|\mathrm{k}\rangle_1$ и $|\mathrm{k}\rangle_2$, редом, као сопствене базисе. То јест, морају да важе комутаторски односи: $[A_1, \rho_1] \neq 0$ и $[B_2, \rho_2] \neq$

0, где су подсистемска стања (која су „мешавине друге врсте“, енг.: *improper mixtures*), $\rho_1 = tr_2\rho = tr_2|\Psi\rangle\langle\Psi|$, и $\rho_2 = tr_1\rho = tr_1|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Због ових комутационих израза, таква мерења се називају *двоструко некомпатибилним* и подразумевају „композитна“ мерења на целини 1+2.

НАПОМЕНА: Под разликовањем стања подразумева се разликовање *на ансамблу*. Разликовање на појединачним мерењима је забрањено сходно, тзв., теорему о забрани клонирања (стања), енг.: *no-cloning theorem* [3]. Сада се тврдња задатка може лако доказати да важи и за стање које је тензорски производ подсистемских статистичких оператора, $\rho_1 \otimes \rho_2$.

1.19 Дати изразе за коначно стање двочестичног система у неком чистом почетном стању, за произвољно селективно мерење на: (а) подсистему 1, и (б) на целом систему.

Решење: (а) По постулату о ортогоналним селективним мерењима, коначно стање гласи:

$$\frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes I_2|\Psi\rangle}} P_{1i}\otimes I_2|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes I_2|\Psi\rangle}} \sum_k c_k\, P_{1i}|\mathrm{k}\rangle_1 \otimes |\mathrm{k}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes I_2|\Psi\rangle}} \sum_{k,l} c_k\, d_{ki,l}|\mathrm{l}\rangle_1 \otimes |\mathrm{k}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes I_2|\Psi\rangle}} \sum_l |\mathrm{l}\rangle_1 \otimes \left(\sum_k c_k\, d_{ki,l}|\mathrm{k}\rangle_2\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{\sum_i |b_i|^2}} \sum_l b_{il}|\mathrm{l}\rangle_1 \otimes |\mathrm{l}\rangle_2 . \quad (1.19\text{a})$$

Пројектор P_{1i} је својствени пројектор мерене опсервабле за одговарајућу својствену вредност (из чисто дискретног спектра); $b_{il}|\mathrm{l}\rangle_2 \equiv \sum_k c_k\, d_{ki,l}|\mathrm{k}\rangle_2$.

(б) Аналогно се добија коначно стање за двочестично мерење, дефинисано пројекторима $P_{1i} \otimes P_{2j}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes P_{2j}|\Psi\rangle}}P_{1i}\otimes P_{2j}|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes P_{2j}|\Psi\rangle}}\sum_k c_k\,P_{1i}|\mathrm{k}\rangle_1\otimes P_{2j}|\mathrm{k}\rangle_2=$$
$$\frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes P_{2j}|\Psi\rangle}}\sum_{k,m,n}c_k\,d_{km,i}e_{kn,i}|\mathrm{m}\rangle_1\otimes|\mathrm{n}\rangle_2=\frac{1}{\sqrt{\langle\Psi|P_{1i}\otimes P_{2j}|\Psi\rangle}}\sum_i|\mathrm{i}\rangle_1\otimes$$
$$\left(\sum_{k,\mathrm{j}}c_k\,d_{km,i}e_{kn,i}|\mathrm{j}\rangle_2\right)\equiv\frac{1}{\sqrt{\sum_m|f_m|^2}}\sum_m f_m|\mathrm{m}\rangle_1\otimes|\mathrm{m}\rangle_2. \qquad (1.19б)$$

1.20 Доказати да се стање пара честица спина ½:

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1z}|-\rangle_{2z}-|-\rangle_{1z}|+\rangle_{2z}\right),$$

може записати и као:

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}-|-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}\right).$$

Решење: Доказ ћемо дати за x-компоненту спина. Како је добро познато, стања својствена за z-компоненту спина се развијају преко базиса за x-компоненту спина:

$$|+\rangle_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x+|-\rangle_x\right),|-\rangle_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x-|-\rangle_x\right). \qquad (1.20а)$$

Сменом ових израза у горње стање целине даје:

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}+|-\rangle_{1x}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{2x}-|-\rangle_{2x}\right)\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.|-\rangle_{1x}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{2x}+|-\rangle_{2x}\right)\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}-|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}+|-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}-\right.$$
$$\left.|-\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}-|+\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}-|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}+|-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}+|-\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}\right)=$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}-|-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}\right). \qquad (1.20б)$$

Сходно првом постулату КМ, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}-|-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}\right)=$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1x}|-\rangle_{2x}-|-\rangle_{1x}|+\rangle_{2x}\right)$, чиме је задатак завр-шен.

НАПОМЕНА: Исто важи и за y-компоненту спина. Подсистемска стања су стања „максималне смешаности“, анализована у Задатку 1.5. Дата стања се могу тицати и мерења спина, где би други систем био апарат. Тада нееднозначност записа (чистог) стања целине води питању: ако је стање целине последица интеракције спина (система 1, тј., објекта мерења) са апаратом, које од понуђених расписа стања одговара мерењу? То јест, која компонента спина је мерена – јер некомутирање не дозвољава истовремено мерење (тј., добијање оштрих вредности) било којег пара компоненти спина. Полазећи од овог уочавања, у стандардној теорији квантног мерења се уводи и трећи систем: окружење апарата, који је многочестични систем; тако се појављује кључна улога процеса декохеренције над апаратом у процесу квантног мерења, за који је дати запис стања само прва фаза, тзв., „предмерење“ (енг.: *premeasurement*).

ОСНОВНЕ ПОУКЕ

- Квантна кохеренција (постојање ненултог „интерференционог члана“ у чистим квантним стањима) је основна и општа особина квантних система која нема аналогона у класичној физици, а њено уочавање представља изазов за експериментаторе.
- Укидање „интерференционог члана“, тј., прелаз са чистог на мешано стање – што се понекад назива „прелаз са квантног на класично“ – се не може остварити унитарним пресликавањем. За то је потребно неунитарно (какав је процес квантног мерења, или декохеренција), или нелинеарно пресликавање.
- Свако потпуно позитивно пресликавање на отвореном систему се може проширити до унитарног (а то значи и линеарног) пресликавања на ширем систему, који поред отвореног система обухвата и његово

окружење.
- Све речено је општег карактера, те се тиче и динамичких пресликавања која се описују „еволуцијом у времену“.
- Ако је отворени систем корелисан са било чиме изван, његова потоња динамика не може бити потпуно позитивна.
- Свака интеракција уводи корелације стања система у интеракцији.
- Дефинисање „базиса бројача“ и „опсервабле бројача“ у теорији декохеренције захтева довољно велико (довољно вишечестично) окружење; алтернатива је кратко време рекуренције почетне квантне кохеренције која би се експериментално могла уочити.

Математички увод

2.1 Задат је линеарни ермитски оператор $\mathcal{P}$ деловањем на статистички оператор изолованог двочестичног система:

$$\mathcal{P}\rho_{SE} = (tr_E\rho_{SE}) \otimes \omega_E \equiv \rho_S \otimes \omega_E$$

где је ω_E произвољни и временски независни статистички оператор који је исти за свако ρ_{SE}. Доказати да:

(а) оператор $\mathcal{P}$ представља пројектор

(б) комутира са изводом по времену

(в) комутира са оператором $U = e^{-i(H_S+H_E)t/h}$.

Решење: (а) Две узастопне примене оператора дају исти резултат, што потврђује да се ради о пројектору: $\mathcal{P}(\rho_S \otimes \omega_E) = \big(tr_E(\rho_S \otimes \omega_E)\big) \otimes \omega_E = \rho_S \otimes \omega_E$.

(б) $\mathcal{P}\frac{d}{dt}\rho_{SE} = \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_{SE}$?

Нека је $\sigma_{SE} = \frac{d}{dt}\rho_{SE}$. Сходно дефиницији:

$$\mathcal{P}\sigma_{SE} = (tr_E\sigma_{SE}) \otimes \omega_E = \left(tr_E \frac{d}{dt}\rho_{SE}\right) \otimes \omega_E = \left(\frac{d}{dt}(tr_E\rho_{SE})\right) \otimes \omega_E. \tag{2.1а}$$

Са друге стране,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_{SE} = \frac{d}{dt}\big((tr_E\rho_{SE}) \otimes \omega_E\big) = \left(\frac{d}{dt}(tr_E\rho_{SE})\right) \otimes \omega_E\ . \tag{2.1б}$$

(в) $\mathcal{P}\tilde{\rho}_{SE} = (\widetilde{\mathcal{P}\rho_{SE}})$?

где тилда означава, нпр., интеракциону слику дефинисану оператором U.

Користећи развој стања по алгебри оператора за два подсистема, $\rho_{SE} = \sum_{p,q} c_{pq}\, F_{Sp} \otimes G_{Eq}$, одакле следи (без губљења општости, у интеракционој слици) $tr_E\tilde{\rho}_{SE} = \sum_{p,q} c_{pq}\, {U_S}^+ F_{Sp} U_S tr_E\big({U_E}^+ G_{Eq} U_E\big) = {U_S}^+ \sum_{p,q} c_{pq}\, F_{Sp} tr_E\big(G_{Eq}\big) U_S = {U_S}^+ (tr_E\rho_{SE}) U_S$,

па лева страна даје (по дефиницији деловања пројектора):

$$\mathcal{P}\tilde{\rho}_{SE} = (tr_E\tilde{\rho}_{SE}) \otimes \omega_E = \big({U_S}^+(tr_E\rho_{SE})U_S\big) \otimes \omega_E. \tag{2.1в}$$

У истом смислу десна страна даје:

$$\widetilde{\mathcal{P}\rho_{SE}} = U^+\big((tr_E\rho_{SE}) \otimes \omega_E\big)U = \big({U_S}^+ \otimes {U_E}^+\big)\big((tr_E\rho_{SE}) \otimes \omega_E\big)(U_S \otimes U_E) = \big({U_S}^+(tr_E\rho_{SE})U_S\big) \otimes \big({U_E}^+\omega_E U_E\big). \tag{2.1г}$$

Изрази (2.1в) и (2.1г) ће бити једнака акко важи ${U_E}^+\omega_E U_E = \omega_E$. Како је ω_E произвољно, такав избор ω_E успоставља једнакост ових израза, а тиме и доказује комутирање из поставке задатка.

2.2 Да ли се сме узети $\omega_E = tr_S \rho_{SE}$ у горњој дефиницији пројектора?

Решење: Ако не смета нелинеарност, тј., двоструко појављивање стања ρ_{SE}, онда сме. Ако се жели сачувати линеарност динамике, онда не сме, јер дефиниција пројекције са овим избором гласи:

$$\mathcal{P}\rho_{SE} = (tr_E \rho_{SE}) \otimes (tr_S \rho_{SE}). \tag{2.2a}$$

Тиме се не губи само линеарност динамике, већ и произвољност ω_E.

2.3 Доказати да је пресликавање:

$$\mathcal{P}\rho = \sum_n (tr_E P_{Sn}\rho) \otimes \ \omega_{En} = \sum_n P_{Sn}\, \rho_S P_{Sn} \otimes \ \omega_{En},$$

такође пројектор, ако: $\rho_S = tr_E \rho$, и скуп пројектора система, $\{P_{Sn}, n = 1,2, \dots\}$, је потпун скуп ортогоналних пројектора који се сабирају у "јединицу".

Решење: Применимо исти (линеарни) пројектор на д.с. горњег израза:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}\left(\sum_n P_{Sn}\, \rho_S P_{Sn} \otimes \ \omega_{En}\right) = \sum_n \mathcal{P}\, (P_{Sn}\rho_S P_{Sn} \otimes \ \omega_{En}) = \\
&\sum_n \left(\sum_k P_{Sk}\, (P_{Sn}\rho_S P_{Sn}) P_{Sk} \otimes \ \omega_{Ek}\right) = \sum_{k,n} P_{Sk}P_{Sn}\rho_S P_{Sn}P_{Sk} \otimes \ \omega_{Ek} = \\
&\sum_{k,n} \delta_{nk} P_{Sk}\rho_S P_{Sk} \otimes \ \omega_{Ek} = \sum_k P_{Sk}\rho_S P_{Sk} \otimes \ \omega_{Ek}.
\end{aligned} \tag{2.3a}$$

Тиме је доказ да се ради о пројектору завршен.

НАПОМЕНА: Узимањем трага по окружењу, уз услов $tr_E \omega_{Ek} = 1, \forall k$, даје за стање система S добро познат израз у теорији мерења – одговара неселективном предиктивном мерењу неке опсервабле са чисто дискретним спектром и својственим пројекторима P_{Sk}, Задатак 1.7.

2.4 Решити нехомогену д.ј. за неки оператор $\sigma(t)$ над Хилбертовим простором стања:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = A(t)\sigma(t) + B(t).$$

Решење: Баш као и код стандардних д.ј. 1. реда са функцијама, решење тражимо у облику:

$$\sigma(t) = \sigma_h(t) + \sigma_n(t), \tag{2.4а}$$

где је $\sigma_h(t)$ решење горње једначине у хомогеном облику, тј., када је $B(t) = 0$. Уведимо пропагатор за хомогени део једначине: $\sigma_h(t) = \mathcal{G}(t,t_0)\sigma_h(t_0)$; наравно, пропагатор (за хомогени део) задовољава $\dot{\mathcal{G}}(t,t_0) = A(t)\mathcal{G}(t,t_0)$. Тада је нехомогени део: $\sigma_n(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}(t,s)\, B(s) ds$. Сада претпоставимо да је пропагатор инвертибилан, тј., да постоји $\mathcal{G}^{-1}(s,t_0)$: $\mathcal{G}(t,t_0) = \mathcal{G}(t,s)\mathcal{G}(s,t_0) \iff \mathcal{G}(t,s) = \mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(s,t_0)$.

Сменом у нехомогени део се добија:

$$\sigma_n(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}(t,s)\, B(s) ds = \mathcal{G}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds. \tag{2.4б}$$

Тако укупно решење постаје:

$$\sigma(t) = \mathcal{G}(t,t_0)\sigma_h(t_0) + \mathcal{G}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds. \tag{2.4в}$$

Лако следи извод по времену, као потврда ваљаности (2.4в):

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{d}{dt}\sigma_h(t) + \frac{d}{dt}\sigma_n(t) = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\sigma_h(t_0) +$$
$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{G}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds\right) = A(t)\mathcal{G}(t,t_0)\sigma_h(t_0) +$$
$$\frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds\right) + \mathcal{G}(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds\right)\right) =$$
$$A(t)\sigma_h(t) + A(t)\left(\mathcal{G}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds\right) + \mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(t,t_0)B(t) =$$
$$A(t)\left(\sigma_h(t) + \mathcal{G}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\, B(s) ds\right) + B(t) = A(t)\sigma(t) + B(t). \tag{2.4г}$$

2.5 Коришћењем изоморфизма Чоија-Јамиолковског, доказати да динамичко пресликавање задато у Краусовој форми:

$$\Phi\rho = \sum_k V_k\, \rho V_k^{+}.$$

увек представља потпуно позитивно пресликавање.

Решење: Изоморфизам Чоија-Јамиолковског своди проверу потпуне позитивности пресликавања („мапе“) Φ на проверу позитивности оператора дводелног система, који представља изоморфни лик мапе на укупном, дводелном, систему. У пракси, то значи проверити да ли је испуњено ($\Phi \equiv \Phi_2$):

$$\langle\varphi|\big((I_1 \otimes \Phi_2)[|\psi\rangle\langle\psi|]\big)|\varphi\rangle \geq 0 \qquad (2.5а)$$

за свако стање, $|\varphi\rangle$, дводелног система, при чему $|\psi\rangle = \sum_l |\mathrm{l}\rangle_1 |\mathrm{l}\rangle_2$ представља (ненормирано) стање максималне сплетености. Ако јесте испуњено (2.5а), онда је пресликавање Φ потпуно позитивно

Сменом израза за $|\psi\rangle$, као и $|\varphi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn}\, |\mathrm{m}\rangle_1 |\mathrm{n}\rangle_2$, лева страна (2.5а) даје:

$$\sum_{m,n,m',n'} c_{mn}^* \, c_{m'n'} \langle m|_2 \langle n|_2 \big((I_1 \otimes \Phi_2)[|\psi\rangle\langle\psi|]\big)|m'\rangle_1 |n'\rangle_2 =$$
$$\sum_{m,n,m',n',l,l'} c_{mn}^* \, c_{m'n'} \langle m|_2 \langle n|_2 \big(|\mathrm{l}\rangle_1 \langle \mathrm{l}'| \otimes \Phi_2\big[|\mathrm{l}\rangle_2 \langle \mathrm{l}'|\big]\big)|m'\rangle_1 |n'\rangle_2 =$$
$$\sum_{m,n,m',n',l,l'} c_{mn}^* \, c_{m'n'} \langle m|l\rangle\langle l'|m'\rangle\langle n|_2 \Phi_2\big[|\mathrm{l}\rangle_2 \langle \mathrm{l}'|\big]|n'\rangle_2 =$$
$$\sum_{m,n,m',n'} c_{mn}^* \, c_{m'n'} \langle n|_2 \Phi_2\big[|\mathrm{m}\rangle_2 \langle \mathrm{m}'|\big]|n'\rangle_2.$$

Стављајући Краусов облик $\Phi\rho = \sum_k V_k \, \rho V_k^+$, добија се:

$$\langle\varphi|\big((I_1 \otimes \Phi_2)[|\psi\rangle\langle\psi|]\big)|\varphi\rangle = \sum_{m,n,m',n',k} c_{mn}^* \, c_{m'n'} \langle n|V_k|\mathrm{m}\rangle_2 \langle \mathrm{m}'|V_k^+|n'\rangle_2 = \sum_k |z_k|^2 \geq 0,$$

где: $z_k \equiv \sum_{m,n} c_{mn}^* \, \langle n|_2 V_k |\mathrm{m}\rangle_2$.

НАПОМЕНА: Ово је *само довољан* услов доказа да је постојање Краусова форме *еквиваленентно* потпуној позитивности динамичког пресликавања [2].

2.6 Извести доказе за постојање инвертибилних пресликавања за унитарну, и за сваку локалну и глатку у времену динамику коришћењем, тзв., формуле временског растављања (енг.: *time-splitting formula*).

Решење: Обе динамике, и унитарна и неунитарна динамика, су локалне и глатке (без сингуларитета) у времену. То значи да обе задовољавају хомогену диференцијалну једначину општег облика:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{dt}} = \mathcal{A}(t)\Phi(t,t_0). \tag{2.6а}$$

Познато је да се решења могу разложити по сукцесивним временским интервалима (*time-splitting formula*), по формули [2]:

$$\Phi(t,t_0) = \lim_{max\lfloor t_{j+1}-t_j\rfloor\to 0} \prod_{j=n-1}^{0} e^{\left(t_{j+1}-t_j\right)\mathcal{A}\left(t_j\right)}. \tag{2.6б}$$

Уведимо пресликавање:

$$\Phi^{-1}(t,t_0) = \lim_{max\lfloor t_{j+1}-t_j\rfloor\to 0} \prod_{j=0}^{n-1} e^{-\left(t_{j+1}-t_j\right)\mathcal{A}\left(t_j\right)}. \tag{2.6в}$$

уз обрнут редослед оператора у односу на (2.6б) и предзнак минус у експоненту.

Како и за пресликавања важи $\lim_{a\to a_0} AB = \left(\lim_{a\to a_0} A\right)\left(\lim_{a\to a_0} B\right)$, то непосредно следи:

$$\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0) = \lim_{max\lfloor t_{j+1}-t_j\rfloor\to 0} \prod_{j=n-1}^{0} e^{\left(t_{j+1}-t_j\right)\mathcal{A}\left(t_j\right)} \prod_{j=0}^{n-1} e^{-\left(t_{j+1}-t_j\right)\mathcal{A}\left(t_j\right)} \tag{2.6г}$$

што се лако своди на $\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0) = I$. Наиме, временски тренуци су обрнутог следа за два производа, а експоненти супротних предзнака, па је крајњи члан за први производ заправо први члан за други (са супротним предзнаком у експоненту): $e^{(t_1-t_0)\mathcal{A}(t_0)}e^{-(t_1-t_0)\mathcal{A}(t_0)} = I$. Тако се сада појављују суседни, следећи чланови: $e^{(t_2-t_1)\mathcal{A}(t_1)}Ie^{-(t_1-t_0)\mathcal{A}(t_1)}$, који се опет „потиру“, и тако до коначног пара: $e^{(t_n-t_{n-1})\mathcal{A}(t_{n-1})}I..I \ldots Ie^{-(t_n-t_{n-1})\mathcal{A}(t_{n-1})} = I$. Како се овај резултат тиче унитарне еволуције, када је $\mathcal{A}(t) = -iH(t)/h$, као и неунитарне, када је $\mathcal{A}(t) = \mathcal{L}(t)$, доказ је завршен.

Другачије записано: како

$$\mathcal{T}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{\mathrm{t}}\mathrm{dt}'\mathcal{A}(t')} = \Phi(t,t_0) = \lim_{max\lfloor t_{j+1}-t_j\rfloor\to 0}\prod_{j=n-1}^{0} e^{(t_{j+1}-t_j)\mathcal{A}(t_j)}, \qquad (2.6д)$$

инверзно пресликавање се може кратко записати:

$$\Phi^{-1}(t,t_0) = \overleftarrow{\mathcal{T}}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\mathrm{t}}\mathrm{dt}'\mathcal{A}(t')}, \qquad (2.6ђ)$$

где стрелица налево означава обрнути временски след. Укупно, овде је доказано да важи, у ознакама чије значење треба имати стално у виду:

$$\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}e^{\int_{t_0}^{t}dt\prime\mathcal{L}(t\prime)}\right)\left(\overleftarrow{\mathcal{T}}e^{-\int_{t_0}^{t}dt\prime\mathcal{L}(t\prime)}\right) = I = \left(\overleftarrow{\mathcal{T}}e^{-\int_{t_0}^{t}dt\prime\mathcal{L}(t\prime)}\right)\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}e^{\int_{t_0}^{t}dt\prime\mathcal{L}(t\prime)}\right). \qquad (2.6е)$$

НАПОМЕНА: Израз (2.6ђ) је познато као јединствено решење диференцијалне једначине (2.6а) [2].

2.7 Дати експлицитне изразе за инверзна динамичка пресликавања описана горњом диференцијалном једначином за два случаја: (а) временски независан генератор, (б) за свако пресликавање за кратак временски интервал и показати (в) да је свака потпуно позитивна динамика Марковљева за довољно кратак временски интервал.

Решење: (а) Ако лиувилијан, $\mathcal{L}$, не зависи од времена, тада диференцијална једначина (в. претходне задатке) има *јединствено* решење [2]:

$$\mathcal{G}(t,t_0) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)}, \qquad (2.7а)$$

што је експоненцијална функција (наравно, *ако* је $\mathcal{L}$ ограничен оператор, *иначе* сума не мора да конвергира):

$$\mathcal{G}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \mathcal{L}^n. \tag{2.7б}$$

Тада је тривијално доказати (баш као у претходном задатку за суседне чланове) да је $e^{-\mathcal{L}(t-t_0)}$ инверзни оператор, што тривијално следи јер комутатор $[\mathcal{L}(t-t_0), -\mathcal{L}(t-t_0)] = 0$.

(б) Распишимо горе дати израз:

$$\mathcal{G}(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} dt_1\, \mathcal{L}(t_1) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} dt_1\, dt_2 \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} dt_1\, dt_2 dt_3 \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3) + \cdots \tag{2.7в}$$

уз услов: $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots$.

Ставимо да се временска еволуција врло мало разликује од почетног тренутка, тј., да $t_i = t_0 + \varepsilon_i, 0 < \varepsilon_i \ll t_i, \forall i$:

$$\mathcal{G}(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0} dt_1\, \mathcal{L}(t_1) + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_1} dt_1\, dt_2 \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2) + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_1}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_2} dt_1\, dt_2 dt_3 \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3) + \cdots \tag{2.7г}$$

Претпоставимо да су за кратке интервале лиувилијани приближно константни и дати „вредношћу“ за почетни тренутак, $\mathcal{L}(t_0)$. Тада, да би ред апроксимације (а тиме и грешка која се при томе прави) био јединствен, ставимо $\varepsilon_i = \varepsilon, \forall i$, па се интеграли у горњем изразу апроксимирају на следећи начин:

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} dt_1\, \mathcal{L}(t_1) \approx \mathcal{L}(t_0)\varepsilon, \tag{2.7д}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} dt_1\, dt_2 \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2) \approx \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} dt_1\, dt_2 \big(\mathcal{L}(t_0)\big)^2 = (\mathcal{L}(t_0)\varepsilon)^2, \tag{2.7ђ}$$

и тако даље. За довољно мало $\varepsilon \ll t_0$, занемаривање чланова сразмерних ε^2 даје:

$$\mathcal{G}(t,t_0) \approx I + \mathcal{L}(t_0)\varepsilon. \tag{2.7е}$$

Уводећи $\mathcal{G}^{-1}(t,t_0) \approx I - \mathcal{L}(t_0)\varepsilon$, очигледно важи:

$$\mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(t,t_0) = \mathcal{G}^{-1}(t,t_0)\mathcal{G}(t,t_0) \approx I, \tag{2.7ж}$$

што доказује да свака динамика описана горе задатом д.ј. има (приближну) инверзну динамику за кратке временске интервале.

(в) Примењено на неко s, $t_0 < s \leq t$, постојање инверзног пресликавања имплицира растављивост (видети Задатак 2.4, као и 2.9), па се може писати:

$$\mathcal{G}(t,s) = \mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(s,t_0) \approx (I + \mathcal{L}(t_0)\varepsilon)(I - \mathcal{L}(t_0)\varepsilon) \approx I, \tag{2.7и}$$

што истиче (тривијалну) потпуну позитивност $\mathcal{G}(t,s)$ која, по дефиницији, успоставља Марковљевост пресликавања $\mathcal{G}(t,t_0)$.

НАПОМЕНА: Појам „ кратак временски интервал“ је врло осетљива ствар. Може се рећи да се за сваку врсту динамике мора посебно увести. На пример, Марковљева динамика има доњу границу времена испод које више не важи – тзв., Борнова апроксимација уводи ту границу без које нема Марковљевих процеса (који су, заправо, процеси на исечцима (огрубљењима) непрекидне временске осе, дужине ε). Отуда за Марковљеве процесе временски интервал ε_1 не сме бити краћи од тог, „Борновог интервала“ (времена заборављања од стране окружења), ε, тј., $\varepsilon < \varepsilon_1$ (а за неке моделе и ситуације може бити и $\varepsilon \ll \varepsilon_1$).

2.8 Доказати да је постојање инверзног пресликавања довољан услов за то да је то пресликавање решење диференцијалне једначине из Задатка 2.6.

Решење: Претпоставимо да постоји инверзно пресликавање $\mathcal{G}^{-1}(s,t_0)$. Тада је пресликавање растављиво.То јест, као и у Задатку 2.4: $\mathcal{G}(t,t_0) = \mathcal{G}(t,s)\mathcal{G}(s,t_0), t_0 \leq s \leq t$, па постоји $\mathcal{G}(t,s) = \mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(s,t_0)$.

Извод по коначном тренутку, t, мапе дате у интегралном облику:

$$\rho(t) = \mathcal{G}(t,t_0)\rho(t_0) \tag{2.8а}$$

даје мастер једначину:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\rho(t_0) = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\left(\mathcal{G}^{-1}(t,t_0)\rho(t)\right) = \left(\frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\mathcal{G}^{-1}(t,t_0)\right)\rho(t) \equiv$$
$$\mathcal{L}(t)\rho(t), \tag{2.8б}$$

где је извршена смена: $\frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\mathcal{G}^{-1}(t,t_0) = \mathcal{L}(t)$.

Одавде можда није сасвим очигледно зашто се не појављује t_0 у $\mathcal{L}(t)$. Зато размотримо дефиницију извода (в. теоријски увод). Сада како постојање инверзног пресликавања *имплицира* растављивост пресликавања, као и претпоставка да важи $\mathcal{G}(t,t) = I, \forall t$:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\rho(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t_0)-\mathcal{G}(t,t_0)}{\varepsilon}\rho(t_0) =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t)-\mathcal{G}(t,t)}{\varepsilon}\mathcal{G}(t,t_0)\rho(t_0) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t)-I}{\varepsilon}\right)\rho(t) \equiv \mathcal{L}(t)\rho(t). \tag{2.8в}$$

НАПОМЕНА: Не може се пренагласити: услов овог и свих сличних разматрања је да се *подразумева да је динамика* (тј.*, њен генератор*) *глатка* у времену. Ако то није испуњено, више не (морају да) важе закључци овог и повезаних задатака. То јест, динамика која није глатка у времену *може имати* диференцијални запис (запис у облику мастер једначине) – видети Задатке 3.26 и 3.27.

2.9 За динамичко пресликавање $\mathcal{G}(t,t_0)$ које је УДП и глатко у времену доказати: (а) еквивалентност следећих особина мапе: инвертибилност, растављивост и постојање мастер једначине која је локална у времену, као и да за растављива пресликавања, (б) услов $\mathcal{G}(s,s) = I, \forall s \in [t_0,t]$ је потребан услов за диференцијабилност пресликавања.

Решење: Као што већ знамо, глаткост пресликавања подразумева да је, за свако $\varepsilon > 0$, добро дефинисано пресликавање $\mathcal{G}(t+\varepsilon,t_0)$. Са друге стране, под УДП пресликавањима се подразумевају она динамичка пресликавања која важе за свако почетно стање $\rho(t_0)$.

(а) Смер доказа, м.ј. $\Rightarrow \exists\mathcal{G}^{-1}(t,t_0)$, дат је Задатком 2.6. Супротан смер доказа, $\exists\mathcal{G}^{-1}(t,t_0) \Rightarrow$ м.ј., дат је Задатком 2.8. Овде ћемо проширити дате доказе непосредним разматрањем услова растављивости пресликавања.

(1) претпоставимо инвертибилност пресликавања, тј., постојање $\mathcal{G}^{-1}(s,t_0), \forall s \in [t_0,t]$ које је исто за свако почетно $\rho(t_0)$. Тада: $\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=}$

$\mathcal{G}(t,t_0)\rho(t_0) = \mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(s,t_0)\rho(s)$; последња једнакост је последица претпостављене инвертибилности пресликавања. Тако се види да је задато пресликавање $\rho(s) \to \rho(t)$, које ћемо обележити са $\mathcal{G}(t,s)$, а које на основи датог израза гласи: $\mathcal{G}(t,s) = \mathcal{G}(t,t_0)\mathcal{G}^{-1}(s,t_0)$, што, другачије записано, гласи: $\mathcal{G}(t,t_0) = \mathcal{G}(t,s)\mathcal{G}(s,t_0)$ и представља услов растављивости пресликавања. То јест, инвертибилност имплицира растављивост.

(2) Претпоставимо растављивост пресликавања. Као што знамо:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \overset{\text{def}}{\equiv} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\rho(t+\varepsilon)-\rho(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t_0)-\mathcal{G}(t,t_0)}{\varepsilon}\rho(t_0) =$$
$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t)-\mathcal{I}}{\varepsilon}\right)\left(\mathcal{G}(t,t_0)\rho(t_0)\right) \overset{\text{def}}{\equiv} \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t)-\mathcal{I}}{\varepsilon}\right)\rho(t) \equiv \mathcal{L}_t\rho(t).$$

То јест, растављивост имплицира локалност мастер једначине – оператор $\mathcal{L}_t$ не зависи од почетног тренутка и важи за свако почетно стање $\rho(t_0)$.

(3) Доказ да постојање локалне мастер једначине имплицира инвертибилност пресликавања дат је у Задатку 2.6.

Укупно је доказано:

инвертибилност ⇒ растављивост ⇒ локалност мастер једначине ⇒ инвертибилност,

што завршава доказ еквивалентности разматраних особина динамичког пресликавња.

(б) Под горњом тачком (2) је коришћено:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t_0)-\mathcal{G}(t,t_0)}{\varepsilon}\rho(t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{G}(t+\varepsilon,t)-\mathcal{I}}{\varepsilon}\mathcal{G}(t,t_0)\,\rho(t_0),$$

што подразумева растављивост пресликавања и непосредно следи из тривијалне једнакости $\mathcal{G}(t,t_0) = \mathcal{I}\mathcal{G}(t,t_0)$ за свако почетно стање $\rho(t_0)$. Са становишта динамичког пресликавања које је растављиво стоји и следећа једнакост: $\mathcal{G}(t,t_0) = \mathcal{G}(t,t)\mathcal{G}(t,t_0)$. Отуда није очигледно да ли је $\mathcal{G}(t,t) = \mathcal{I}$, а посебно није очигледно да ли то важи за произвољан тренутак времена, тј., није очигледно да ли важи $\mathcal{G}(s,s) = \mathcal{I}$, $\forall s \in [t_0,t]$.

Претпоставимо обрнуто: $\mathcal{G}(s,s) \neq I$ за макар неко s а да је мапа ипак диференцијабилна, тј., да постоји њен извод за сваки тренутак. Тада се, за растављива пресликавања, може писати:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{G}(t,t_0)}{dt}\rho(\mathrm{t}_0) = \frac{d\mathcal{G}(t,s)}{dt}\rho(s),\ \forall s \in [t_0, t], \tag{2.9а}$$

па скроз десна страна израза (2.9а) има две формалне интеграције (стања, и пресликавања, редом):

$$\rho(t) = \rho(s) + \left(\int_s^t \frac{d\mathcal{G}(t',t_0)}{dt'}\rho(s)\,dt'\right) = \rho(s) + \left(\int_s^t \frac{d\mathcal{G}(t',t_0)}{dt'}\,dt'\right)\rho(s), \tag{2.9б}$$

$$\rho(t) = \left(\mathcal{G}(s,s) + \int_s^t \frac{d\mathcal{G}(t',t_0)}{dt'}\,dt'\right)\rho(s) = \mathcal{G}(s,s)\rho(s) + \left(\int_s^t \frac{d\mathcal{G}(t',t_0)}{dt'}\,dt'\right)\rho(s). \tag{2.9в}$$

Уочити да је у (2.9б) коришћен почетни услов $\rho(t)_{t=s} = \rho(s)$, тј., појављивање $\rho(s)$ у (2.9б) није резултат рачуна, већ дефиниције. Други члан у (2.9б) је, наравно, рачунски корак.

Сада, ако $\mathcal{G}(s,s) \neq I$ за макар неко $\mathrm{s} \in [t_0, t]$, изједначавање (2.9а) и (2.9б) *води противуречности*, $\rho(t) \neq \rho(t)$, што завршава доказ потребности услова $\mathcal{G}(s,s) = I, \forall \mathrm{s} \in [t_0, t]$.

2.10 Извести израз за прелаз са интеракционе на Шредингерову слику за стање отвореног система задато у Краусовој форми.

Решење: Нека је задато стање отвореног система S у интеракционој слици у Краусовом облику:

$$\rho_{IS}(t) = \sum_k K_{Ik}(t,t_0)\,\rho_S(t_0)K_{Ik}^{+}(t,t_0). \tag{2.10а}$$

По дефиницији, прелазак са интеракционе на Шредингерову слику за затворени систем „(отворени) систем +окружење“ је задато изразом:

$$\rho_{ISE}(t) = U^{+}(t)\rho_{SE}(t)U(t), \tag{2.10б}$$

при чему је $U(t) = e^{-i(H_S+H_E)t/h} = e^{-iH_St/h} \otimes e^{-iH_Et/h} \equiv U_S(t) \otimes U_E(t)$; Шредингерова слика нема никакву додатну ознаку за стања и операторе.

Теорем алгебре оператора (ТАО) каже да се сваки статистички оператор целине $S + E$ може развити по базису алгебре оператора тог система у облику (већ коришћено у Задатку 2.1):

$$\rho_{SE}(t) = \sum_{i,j} c_{ij}\,(t) A_{Si} \otimes B_{Ej}. \tag{2.10в}$$

Сменом (2.10в) у (2.10б):

$$\rho_{ISE}(t) = \sum_{i,j} c_{ij}\,(t) U_S^{+}(t) A_{Si} U_S(t) \otimes U_E^{+}(t) B_{Ej} U_E(t),$$

одакле следи, после узимања трага по окружењу:

$$\rho_{IS}(t) = \sum_i \big(\sum_{\mathrm{j}} c_{ij}(t) \big(tr_E B_{Ej}\big)\big) U_S^{+}(t) A_{Si} U_S(t), \tag{2.10г}$$

то јест:

$$U_S(t)\rho_{IS}(t)U_S^{+}(t) = \sum_i \big(\sum_{\mathrm{j}} c_{ij}(t)\big(tr_E B_{Ej}\big)\big) A_{Si} = \rho_S(t), \tag{2.10д}$$

где последња једнакост непосредно следи узимањем трага по окружењу израза (2.10в). Сада сменом Краусовог облика (2.10б) у леву страну (2.10д) се добија:

$$\rho_S(t) = \sum_k U_S(t) K_{Ik}(t, t_0)\, \rho_S(t_0) K_{Ik}^{+}(t, t_0) U_S^{+}(t). \tag{2.10ђ}$$

То јест, *облик* Краусовог развоја се сачувава, уз везу Краусових оператора у интеракционој слици, $K_{Ik}(t, t_0)$, са Краусовим операторима за стање у Шредингеровој слици:

$$K_k(t, t_0) = U_S(t, t_0) K_{Ik}(t, t_0). \tag{2.10е}$$

2.11 Да ли се горе поменути теорем алгебре оператора (ТАО) тиче и записа стања који се назива „сепарабилним“:

$$\rho_{SE} = \sum_{i,j} p_{ij}\, \rho_{Si} \otimes \rho_{Ej},$$

где се појављују статистички оператори за подсистеме? Који услов морају испунити константе p_{ij}?

Решење: Не, не тиче се развоја у овом задатку, јер развој дат у претходном задатку се тиче неког целог (потпуног) *базиса* алгебре оператора над Хилбертовим простором стања, чији је подпростор Банахов простор статистичких оператора. Овде дати „сепарабилни“ облик стања је посебан, у смислу да *не важи за све статистичке операторе* (чак ако неки статистички оператори и могу бити део базиса алгебре, *они не чине цео базис алгебре*). За статистичке операторе који се не могу представити у горе датом, „сепарабилном“, облику каже се да имају особину квантне сплетености (енг.: *entanglement*), тј., могу дати нарушење, тзв., Белове неједнакости. Статистички оператори који се могу представити у сепарабилном облику не могу дати нарушење Белове неједнакости, али могу носити квантне корелације које уопштавају (проширују) сплетеност и називају се *квантним дискордом*. Услови $tr\rho_{SE} = 1 = tr_S\rho_S = tr_E\rho_E$ ($\rho_{S,E} = tr_{E,S}\rho_{SE}$) дају услове за константе: $\sum_{i,j} p_{ij} = 1 = \sum_i q_i = \sum_j r_j, q_i = \sum_j p_{ij}, r_j = \sum_i p_{ij}$.

2.12 Извести прелаз са интеракционе на Шредингерову слику за закон кретања стања у диференцијалном облику.

Решење: Као што је наглашено у Задатку 2.10, квантне слике дефинисане су за затворене (самим тим и за изоловане) системе. То је овде целина $S + E$:

$$\rho_{SE}(t) = U_0(t)\tilde{\rho}_{SE}(t)U_0^+(t), \quad (2.12а)$$

где „тилда“ означава интеракциону слику. Одавде одмах следи:

$$\frac{d\rho_{SE}(t)}{dt} = \frac{dU_0(t)}{dt}\tilde{\rho}_{SE}(t)U_0^+(t) + U_0(t)\tilde{\rho}_{SE}(t)\frac{dU_0^+(t)}{dt} + U_0(t)\frac{d\tilde{\rho}_{SE}(t)}{dt}U_0^+(t).(2.12б)$$

Како важи $\frac{dU_0(t)}{dt} = -\frac{i}{h}H_0U_0(t)$, лако следи:

$$\frac{d\rho_{SE}(t)}{dt} = -\frac{i}{h}[H_0, \rho_{SE}(t)] + U_0(t)\frac{d\tilde{\rho}_{SE}(t)}{dt}U_0^+(t), \quad (2.12в)$$

где је коришћено горње $\rho_{SE}(t) = U_0(t)\tilde{\rho}_{SE}(t)U_0^+(t)$.

Сада треба узети парцијални траг по окружењу:

$$tr_E \frac{d\rho_{SE}(t)}{dt} = \frac{d\left(tr_E \rho_{SE}(t)\right)}{dt} = \frac{d\rho_S(t)}{dt} = tr_E \left(-\frac{i}{h}[H_0, \rho_{SE}(t)] + U_0(t)\frac{d\tilde{\rho}_{SE}(t)}{dt} U_0^+(t)\right). \tag{2.12г}$$

Искористимо (2.10в,г):

$$tr_E \left(-\frac{i}{h}[H_0, \rho_{SE}(t)]\right) = -\frac{i}{h}\sum\nolimits_{i,j} c_{ij}\, tr_E\left(\left[H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E, A_{Si} \otimes B_{Ej}\right]\right) =$$
$$-\frac{i}{h}\sum\nolimits_{i,j} c_{ij}\, tr_E\left([H_S, A_{Si}] \otimes B_{Ej} + A_{Si} I_S \otimes \left[H_E, B_{Ej}\right]\right) =$$
$$-\frac{i}{h}\left[H_S, \sum\nolimits_{i,j} c_{ij}\, tr_E\left(B_{Ej}\right) A_{Si}\right] = -\frac{i}{h}[H_S, \rho_S],$$

где је $\rho_S = tr_E \rho_{SE} = \sum_{i,j} c_{ij}\, tr_E\left(B_{Ej}\right) A_{Si}$. То јест,

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -\frac{i}{h}[H_S, \rho_S(t)] + tr_E\left(U_0(t)\frac{d\tilde{\rho}_{SE}(t)}{dt} U_0^+(t)\right) =$$
$$-\frac{i}{h}[H_S, \rho_S(t)] + U_S\left(tr_E\left(U_E(t)\frac{d\tilde{\rho}_{SE}(t)}{dt} U_E^+(t)\right)\right) U_S^+ \equiv$$
$$-\frac{i}{h}[H_S, \rho_S(t)] + U_S\left(\widetilde{D}_S \tilde{\rho}_S(t)\right) U_S^+, \tag{2.12д}$$

где $\widetilde{D}_S$ представља оператор система S, који се назива дисипатор мастер једначине (у интеракционој слици). Ово је *најопштији резултат*. Даља поједностављења важе *само* под одређеним претпоставкама о дисипатору.

2.13 Доказати да је за Марковљеве процесе дисипатор истог облика за интеракциону и Шредингерову слику.

Решење: Дисипатор за Марковљеве процесе је *операторског* облика (у интеракционој слици, израз (2.12д)) и појављује се у првом Линдбладовом облику, Дефиниција 27:

$$\widetilde{D}_S[\tilde{\rho}_S(t)] \equiv \sum\nolimits_{\omega,\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega)\ \left[A_{S\beta}(\omega)\tilde{\rho}_S(t) A_{S\alpha}^+(\omega) - \frac{1}{2}\left\{A_{S\alpha}^+(\omega) A_{S\beta}(\omega), \tilde{\rho}_S(t)\right\}\right]. \tag{2.13а}$$

Како важи [2, 4]: $U_{S0} A_{S\alpha}(\omega) U_{S0}^+ = e^{i\omega t} A_{S\alpha}(\omega),\ U_{S0} A_{S\alpha}^+(\omega)\, U_{S0}^+ = e^{-i\omega t} A_{S\alpha}^+(\omega)$, тада прелаз на Шредингерову слику (по дефиницији, за цео систем) своди се на *операторски* израз само за отворени систем:

$$U_0\big(\widetilde{D}_S \otimes I_E\big)U_0^+ = U_{S0}\widetilde{D}U_{s0}^+ \otimes I_E \equiv$$

$$\textstyle\sum_{\omega,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\ \Big[U_{s0}A_{S\beta}(\omega)\tilde{\rho}_S(t)A_{S\alpha}^+(\omega)U_{s0}^+ -$$

$$\tfrac{1}{2}U_{s0}\big\{A_{S\alpha}^+(\omega)A_{S\beta}(\omega),\tilde{\rho}_S(t)\big\}U_{s0}^+\Big] \otimes I_E =$$

$$\textstyle\sum_{\omega,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\ \Big[e^{i\omega t}A_{S\beta}(\omega)\rho_S(t)A_{S\alpha}^+(\omega)e^{-i\omega t} -$$

$$\tfrac{1}{2}\big\{e^{-i\omega t}A_{S\alpha}^+(\omega)A_{S\beta}(\omega)e^{i\omega t},\rho_S(t)\big\}\Big] \otimes I_E =$$

$$\textstyle\sum_{\omega,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\ \Big[A_{S\beta}(\omega)\rho_S(t)A_{S\alpha}^+(\omega) - \tfrac{1}{2}\big\{A_{S\alpha}^+(\omega)A_{S\beta}(\omega),\rho_S(t)\big\}\Big] \quad \otimes I_E \quad \equiv$$

$$D_S \otimes I_E. \tag{2.13б}$$

Дакле, супероператор дисипације („дисипатор“), $\mathcal{D}$, на исти начин делује, и на стање у интеракционој, и на стање у Шредингеровој слици:

$$\mathcal{D}\big(\tilde{\rho}_S(t)\big) = \textstyle\sum_{\omega,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\ \Big[A_{S\beta}(\omega)\tilde{\rho}_S(t)A_{S\alpha}^+(\omega) - \tfrac{1}{2}\big\{A_{S\alpha}^+(\omega)A_{S\beta}(\omega),\tilde{\rho}_S(t)\big\}\Big], \tag{2.13в}$$

док

$$\mathcal{D}\big(\rho_S(t)\big) = \textstyle\sum_{\omega,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\ \Big[A_{S\beta}(\omega)\rho_S(t)A_{S\alpha}^+(\omega) - \tfrac{1}{2}\big\{A_{S\alpha}^+(\omega)A_{S\beta}(\omega),\rho_S(t)\big\}\Big], \tag{2.13г}$$

то јест, дисипаторски члан у Шредингеровој слици следи једноставном заменом стања $\tilde{\rho}_S(t)$ у интеракционој, стањем $\rho_S(t)$ у Шредингеровој слици, *без измена* у операторима $A_{S\alpha}(\omega)$ који потичу из интеракционе слике.

НАПОМЕНА: Строго говорећи, сви полазни изрази и односи коришћени у овом задатку подразумевају слабу интеракцију отвореног система са окружењем. Тада се може закључити да прелаз са интеракционе слике:

$$\frac{d\tilde{\rho}_S}{dt} = -\frac{i}{h}[H_{LS},\rho_S] + \textstyle\sum_i \gamma_i\Big(L_i\tilde{\rho}_S L_i^+ - \frac{1}{2}\{L_i^+L_i,\tilde{\rho}_S\}\Big), \tag{2.13д}$$

на Шредингерову слику је *са истим значењем ознака* (оператора и параметара):

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\frac{i}{h}[H_S + H_{LS},\rho_S] + \textstyle\sum_i \gamma_i\Big(L_i\rho_S L_i^+ - \frac{1}{2}\{L_i^+L_i,\rho_S\}\Big). \tag{2.13ђ}$$

где је, у комутатор, још само додат „Лембов померај“, H_{LS}, за који важи $[H_{LS},H_{S0}] = 0 = [H_{LS}\otimes I_E, U_0]$. У општем случају, тј., изван претпоставке слабе интеракције и

Марковљевости процеса, прелаз са једне на другу слику се *мора радити по општој дефиницији за* цео *систем*, $S+E$ - неће важити „краћи пут“ само за отворени систем. Уопштење овде добијеног резултата се може наћи у оквиру решења Задатка 4.23. Варијације на тему хамилтонијана који дефинише интеракциону слику, када је отворени систем и сам сложен (има структуру, тј., подсистеме), се могу наћи, нпр., у [2], видети и Задатке 4.7 и 4.9.

2.14 Доказати да за Марковљеву динамику важи једнакост:

$$\sum_i tr(\rho L_i)\, tr(\rho L_i^{+}) = tr(\rho \sum_i L_i^{+} L_i) \qquad \text{(2.14а)}$$

ако је ρ чисто стање у току целе еволуције у времену.

Решење: Марковљева динамика је општег Линдбладовог типа:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{h}[H,\rho] + \sum_i \gamma_i \left(L'_i\rho L'^{+}_i - \frac{1}{2}\{L'^{+}_i L'_i, \rho\}\right) \equiv -\frac{i}{h}[H,\rho] + \sum_i \left(L_i\rho L_i^{+} - \frac{1}{2}\{L_i^{+} L_i, \rho\}\right). \qquad \text{(2.14б)}$$

За чисто стање важи $\rho = \rho^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, одакле следи: $\rho L_i \rho = \langle\varphi|L_i|\varphi\rangle|\varphi\rangle\langle\varphi| \equiv (tr\rho L_i)\rho$, па зато важи и $tr(\rho L_i \rho L_i^{+}) = \langle\varphi|(L_i|\varphi\rangle\langle\varphi|L_i^{+})|\varphi\rangle = tr(\rho L_i) tr(\rho L_i^{+})$.

Како уопштено важи, $0 = tr\left(\frac{d}{dt}\rho^2\right) = tr\left(\rho\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\rho\right) = 2tr\left(\rho\frac{d\rho}{dt}\right)$, то из Линдбладове мастер једначине следи, за чисто стање у сваком тренутку:

$$0 = tr\left(\rho\frac{d\rho}{dt}\right) = -\frac{i}{h} tr(\rho[H,\rho]) + \sum_i \left(tr(\rho L_i \rho L_i^{+}) - \frac{1}{2} tr\{\rho L_i^{+} L_i, \rho\}\right) = -\frac{i}{h} tr([\rho,\rho]H) + \sum_i \left(tr(\rho L_i) tr(\rho L_i^{+}) - tr(\rho L_i^{+} L_i \rho)\right) = \sum_i \left(tr(\rho L_i) tr(\rho L_i^{+}) - tr(\rho L_i^{+} L_i \rho)\right), \qquad \text{(2.14в)}$$

одакле непосредно следи довољан (ако је стање чисто) услов за важење горње једнакости:

$$0 = \sum_i \left(tr(\rho L_i) tr(\rho L_i^{+}) - tr(\rho L_i^{+} L_i \rho)\right) \Leftrightarrow \sum_i tr(\rho L_i) tr(\rho L_i^{+}) = tr(\rho \sum_i L_i^{+} L_i). \qquad \text{(2.14г)}$$

Потребност овог услова (импликација у супротном смеру) следи из логички еквивалентног резултата, који ће ниже бити доказан: ако ρ није чисто стање, онда није испуњена дата једнакост.

Дакле, ако стање није чисто, онда се добија израз:

$$\sum_i \left(tr(\rho L_i \rho L_i^+) - \frac{1}{2} tr\{\rho L_i^+ L_i, \rho\} \right), \qquad (2.14д)$$

за који, смењујући спектрални облик $\rho = \sum_n p_n P_n$, где су P_n ортогонални пројектори, следи:

$$\sum_i \left(tr(\rho L_i \rho L_i^+) - \frac{1}{2} tr\{\rho L_i^+ L_i, \rho\} \right) = \sum_{i,n,n'} p_n p_{n'} \big(tr(P_n L_i P_{n'} L_i^+) - tr(\delta_{nn'} P_n L_i^+ L_i) \big), \qquad (2.14ђ)$$

где је у последњем члану коришћена комутативност под трагом (као и $P_n P_{n'} = \delta_{nn'} P_n$). Тај члан је облика са десне стране израза у поставци задатка:

$$\sum_{i,n,n'} p_n p_{n'} tr(\delta_{nn'} P_n L_i^+ L_i) = tr\big(\sum_{i,n,n'} p_n p_{n'} \delta_{nn'} P_n L_i^+ L_i \big) = tr(\rho \sum_i L_i^+ L_i). \qquad (2.14е)$$

Али први члан са десне стране (2.14ђ) гласи:

$$\sum_{i,n,n'} p_n p_{n'} tr(P_n L_i P_{n'} L_i^+), \qquad (2.14ж)$$

што се не може записати у тражени облик (тј., као лева страна (2.14а)). Тако:

$$\sum_{i,n,n'} p_n p_{n'} tr(P_n L_i P_{n'} L_i^+) \neq \sum_{i,n,n'} p_n p_{n'} tr(P_n L_i)\, tr(P_{n'} L_i^+), \qquad (2.14з)$$

осим за случај чистог стања, тј., када $p_\varphi = 1$ и $P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$.

Тиме је доказ тврдње задатка завршен.

НАПОМЕНА: Може се показати да, за Марковљеве процесе, у општем случају важи[12]:

$$\sum_i tr(\rho L_i)\, tr(\rho L_i^+) \leq tr(\rho \sum_i L_i^+ L_i). \qquad (2.14и)$$

---

[12] A. Sandulescu, H. Scutaru, Ann. Phys. **173**, 277 (1987).

2.15 За случај разматран у претходном задатку показати да Марковљева мастер једначина може бити записана у облику Шредингерове једначине са не-ермитским хамилтонијаном. Дати експлицитан облик таквог „хамилтонијана“.

Решење: Ако је стање отвореног система чисто у сваком тренутку, тј., $\rho(t) = |\varphi(t)\rangle\langle\varphi(t)|$, тада за било које чисто стање $|\theta\rangle$ важи:

$$\rho(t)|\theta\rangle = \langle\varphi(t)|\theta\rangle|\varphi(t)\rangle \equiv \langle\varphi|\theta\rangle|\varphi\rangle. \tag{2.15а}$$

Отуда важи и:

$$\frac{d}{dt}\rho(t)|\theta\rangle = \frac{d}{dt}\rho^2|\theta\rangle = \left(\frac{d\rho}{dt}\rho + \rho\frac{d\rho}{dt}\right)|\theta\rangle = \mathcal{L}(\rho)\,\rho|\theta\rangle + \rho\mathcal{L}(\rho)|\theta\rangle, \tag{2.15б}$$

где је $\mathcal{L}$ лиувилијан Марковљеве мастер једначине. А десна страна (2.15а) даје:

$$\frac{d}{dt}\langle\varphi|\theta\rangle|\varphi\rangle = \left\langle\frac{d}{dt}\varphi\middle|\theta\right\rangle|\varphi\rangle + \langle\varphi|\theta\rangle\left|\frac{d}{dt}\varphi\right\rangle. \tag{2.15в}$$

Уписујући лиувилијан, важи једнакост:

$$\mathcal{L}(\rho)\,\rho|\theta\rangle + \rho\mathcal{L}(\rho)|\theta\rangle = -\frac{i}{h}([H,\rho]\rho + \rho[H,\rho])|\theta\rangle + \big(\mathcal{D}(\rho)\rho + \rho\mathcal{D}(\rho)\big)|\theta\rangle, \tag{2.15г}$$

где је $\mathcal{D}(\rho)$ дисипатор. Комутатори у горњем изразу се поједностављују: $[H,\rho]\rho + \rho[H,\rho] = [H,\rho^2] = [H,\rho]$, јер је стање чисто у сваком тренутку, па

$$\mathcal{L}(\rho)\,\rho|\theta\rangle + \rho\mathcal{L}(\rho)|\theta\rangle = \left(-\frac{i}{h}[H,\rho] + \mathcal{D}(\rho)\rho + \rho\mathcal{D}(\rho)\right)|\theta\rangle. \tag{2.15д}$$

Користећи из претходног задатка, $\rho A\rho = tr(\rho A)\rho$, и смењујући израз за дисипатор из претходног задатка, следи:

$$\left(-\frac{i}{h}[H,\rho] + \mathcal{D}(\rho)\rho + \rho\mathcal{D}(\rho)\right)|\theta\rangle = \Big\{-\frac{i}{h}[H,\rho] + \textstyle\sum_i \Big[\big(tr(\rho L_i^+)\big)L_i\rho + \big(tr(\rho L_i)\big)\rho L_i^+ - \big(tr(\rho L_i^+ L_i)\big)\rho - \frac{1}{2}\{\rho, L_i^+ L_i\}\Big]\Big\}|\theta\rangle. \tag{2.15ђ}$$

Срачунавајући чланове у (2.15ђ) добијају се њихови други облици: $[H,\rho]|\theta\rangle = \langle\varphi|\theta\rangle\, H|\varphi\rangle - \langle\varphi|H|\theta\rangle\, |\varphi\rangle$, $L_i\rho|\theta\rangle = \langle\varphi|\theta\rangle L_i|\varphi\rangle$, $\rho L_i^+|\theta\rangle = \langle\varphi|L_i^+|\theta\rangle\, |\varphi\rangle$, $\rho L_i^+ L_i|\theta\rangle = \langle\varphi|L_i^+ L_i|\theta\rangle\, |\varphi\rangle$, $L_i^+ L_i\rho|\theta\rangle = \langle\varphi|\theta\rangle\, L_i^+ L_i|\varphi\rangle$.

Тако сада сменом у (2.15ђ) следи:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\varphi\middle|\theta\right\rangle |\varphi\rangle + \langle\varphi|\theta\rangle \left|\frac{d}{dt}\varphi\right\rangle = -\frac{i}{h}\left(\langle\varphi|\theta\rangle\, H|\varphi\rangle - \langle\varphi|H|\theta\rangle\, |\varphi\rangle\right) +$$
$$\sum\nolimits_i \Big[\big(tr(\rho L_i^+)\big)\langle\varphi|\theta\rangle L_i|\varphi\rangle + \big(tr(\rho L_i)\big)\langle\varphi|L_i^+|\theta\rangle\, |\varphi\rangle -$$
$$\big(tr(\rho L_i^+ L_i)\big)\langle\varphi|\theta\rangle|\varphi\rangle - \frac{1}{2}\left(\langle\varphi|L_i^+ L_i|\theta\rangle\, |\varphi\rangle + \langle\varphi|\theta\rangle\, L_i^+ L_i|\varphi\rangle\right)\Big] =$$
$$-\frac{i}{h}\left(\langle\varphi|\theta\rangle\, H|\varphi\rangle - \langle\varphi|H|\theta\rangle\, |\varphi\rangle\right) + \sum\nolimits_i \Big[\big(tr(\rho L_i^+)\big)\langle\varphi|\theta\rangle L_i|\varphi\rangle +$$
$$\big(tr(\rho L_i)\big)\langle\varphi|L_i^+|\theta\rangle\, |\varphi\rangle - \frac{1}{2}\big(tr(\rho L_i^+ L_i)\big)\langle\varphi|\theta\rangle|\varphi\rangle - \frac{1}{2}\langle\varphi|tr(\rho L_i^+ L_i)|\theta\rangle|\varphi\rangle -$$
$$\frac{1}{2}\left(\langle\varphi|L_i^+ L_i|\theta\rangle\, |\varphi\rangle + \langle\varphi|\theta\rangle\, L_i^+ L_i|\varphi\rangle\right)\Big].$$

(2.15е)

Како израз (2.15е) мора да важи за свако $|\theta\rangle$, изједначавањем израза са леве и десне стране се добија:

$$\left|\frac{d}{dt}\varphi\right\rangle \equiv \frac{d}{dt}|\varphi\rangle = \left(-\frac{i}{h}H + \sum\nolimits_i \left(\big(tr(\rho L_i^+)\big)L_i - \frac{1}{2}\big(tr(\rho L_i^+ L_i)\big) - \frac{1}{2}L_i^+ L_i\right)\right)|\varphi\rangle \equiv$$
$$-\frac{i}{h}H_{eff}|\varphi\rangle,$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}\varphi\middle|\theta\right\rangle = \left\langle\varphi\right|\left(\frac{i}{h}H + \sum\nolimits_i \left(\big(tr(\rho L_i)\big)L_i^+ - \frac{1}{2}\big(tr(\rho L_i^+ L_i)\big) - \frac{1}{2}L_i^+ L_i\right)\right)\left|\theta\right\rangle \equiv$$
$$\frac{i}{h}\langle\varphi|H_{eff}^+|\theta\rangle. \qquad (2.15ж)$$

Оба израза дају исту једначину Шредингеровог облика:

$$\frac{d}{dt}|\varphi\rangle = -\frac{i}{h}H_{eff}|\varphi\rangle, \qquad (2.15з)$$

где је „хамилтонијан“:

$$H_{eff} = H + ih\sum\nolimits_i \left(\langle\varphi|L_i^+|\varphi\rangle L_i - \frac{1}{2}\langle\varphi|L_i^+ L_i|\varphi\rangle - \frac{1}{2}L_i^+ L_i\right) = H +$$
$$ih\sum\nolimits_i \langle\varphi|L_i^+|\varphi\rangle L_i - \frac{ih}{2}\langle\varphi|\sum\nolimits_i L_i^+ L_i\, |\varphi\rangle - \frac{ih}{2}\sum\nolimits_i L_i^+ L_i. \qquad (2.15и)$$

НАПОМЕНА: Овде разматрани поступак спада у врсту покушаја квантовања *дисипативнох* система[13]. Израз (2.15з) не уводи нове физичке претпоставке у динамику описану мастер једначином – што није случај са другачијим Шредингеровим једначинама стохастичке врсте, које уводе квантне скокове као кључне чиниоце динамике [4], видети Задатак 4.10.

2.16 Показати да се мастер једначина Калдеире и Легета може: (а) записати у облик:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{h}[H,\rho] + \sum_{i,j} a_{ij}\left(F_i\rho F_j^{+} - \frac{1}{2}\left\{F_j^{+}F_i,\rho\right\}\right), \qquad (2.16а)$$

где су оператори F_i линеарне комбинације опсервабли положаја и импулса честице, као и (б) да за врло високу температуру описује Марковљев процес.

Решење: Мастер једначина Калдеире-Легета је дата изразом:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{h}[H,\rho] - \frac{i\gamma}{h}[x,\{p,\rho\}] - \frac{2m\gamma k_BT}{h^2}\big[x,[x,\rho]\big]., \qquad (2.16б)$$

Где је x степен слободе а p импулс једнодимензионалног система масе m у контакту са купатилом на температури T и $\gamma > 0$ је фактор пригушења.

(а) Како се у мастер једначини појављују само опсервабле положаја и импулса, и то линеарно, пођимо од претпоставке да се у (2.16а) могу појавити само два оператора: $F_1 = x$, и $F_2 = p$. Тада дисипаторски члан гласи:

$$a_{11}\left(x\rho x - \frac{1}{2}(x^2\rho + \rho x^2)\right) + a_{12}\left(x\rho p - \frac{1}{2}(px\rho + \rho px)\right) + a_{21}\left(p\rho x - \frac{1}{2}(xp\rho + \rho xp)\right) + a_{22}\left(p\rho p - \frac{1}{2}(p^2\rho + \rho p^2)\right). \qquad (2.16в)$$

Поређењем са мастер једначином (2.16б) лако се види да је $x\rho x - \frac{1}{2}(x^2\rho + \rho x^2) = -2\big[x,[x,\rho]\big]$, одакле следи закључак да се може узети $a_{11} = -\frac{2m\gamma k_BT}{h^2}$, као и да $a_{22} = 0$. С обзиром да дисипатор мора бити ермитски

---

[13] R. W. Hasse, Phys. Lett. **85B**, 97 (1979); H. Dekker, Phys. Lett. **74A**, 19 (1979); H. Dekker, M. C. Valsakumar, Phys. Lett. **104A**, 67 (1984).

оператор, стоји и услов $a_{21} = a_{12}^*$. Тада преостаје да буде испуњена једнакост:

$$a_{12}\left(x\rho p - \frac{1}{2}(px\rho + \rho px)\right) + a_{12}^*\left(p\rho x - \frac{1}{2}(xp\rho + \rho xp)\right) = -\frac{i\gamma}{h}[x, \{p, \rho\}]. \tag{2.16г}$$

Због десне стране израза, одаберимо, нпр., $a_{12} = -\frac{i\gamma}{h}$. Тада следи:

$$-\frac{i\gamma}{h}\left(x\rho p - \frac{1}{2}(px\rho + \rho px) - p\rho x + \frac{1}{2}(xp\rho + \rho xp)\right) = -\frac{i\gamma}{h}(xp\rho - p\rho x + x\rho p - \rho px), \tag{2.16д}$$

што очигледно није испуњено, јер:

$$-\frac{i\gamma}{2h}(-px\rho - \rho px + xp\rho + \rho xp) \neq -\frac{i\gamma}{h}(xp\rho - \rho px). \tag{2.16ђ}$$

Зато додајмо на леву страну непознати члан који би могао да задовољи потребну једнакост. Ако тај члан не буде унео противуречности, онда се задатак може сматрати обављеним. То јест, *уведимо и потражимо* неко A тако да важи једнакост:

$$-\frac{i\gamma}{2h}(-px\rho - \rho px + xp\rho + \rho xp) + A = -\frac{i\gamma}{h}(xp\rho - \rho px). \tag{2.16е}$$

Тако се добија израз:

$$A = -\frac{i\gamma}{2h}(2xp\rho - 2\rho px + px\rho + \rho px - xp\rho - \rho xp) = -\frac{i\gamma}{2h}[\{x, p\}, \rho]. \tag{2.16е}$$

Занимљиво, $\{x, p\}$ се може придружити хамилтонијану, и тако је све усклађено. То јест, сада мастер једначина Калдеире-Легета добија жељени облик:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{h}[H', \rho] + \sum_{i,j} a_{ij}\left(F_i\rho F_j^+ - \frac{1}{2}\{F_j^+ F_i, \rho\}\right), \tag{2.16ж}$$

уз услове:

$H' = H - \frac{\gamma}{2}\{x, p\}$, $F_1 = x$, и $F_2 = p$, док је матрица

$$a = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4m\gamma k_B T}{h^2} & -\frac{i\gamma}{h} \\ \frac{i\gamma}{h} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.16з)$$

(б) Својствене вредности матрице (2.16з) гласе: $\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b^2}), \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b^2})$, где $a = \frac{4m\gamma k_B T}{h^2}, b = \frac{\gamma}{h}$. Прва вредност је негативна (то следи и из уочавања да је детерминанта матрице негативна, $\det(a) = -(\gamma/h^2) < 0$), те матрица (2.16з) није позитивно-семидефинитна, па се (2.16ж) не може преписати у Линдбладов облик. Међутим, захтевајући ненегативну детерминанту матрице система могла би да следи прави „први“ Линдбладов облик одакле би следио и Линдбладов облик мастер једначине – то јест, мастер једначина би описивала Марковљев процес. Зато узмимо минималан услов, $\det(a') = 0$, што би обезбедило позитивну-семидефинитност нове матрице система, означену са a'. Тада из (2.16з) следи услов $a_{22} = \gamma/4mk_B T$, што води новој матрици система:

$$a' = \begin{pmatrix} \frac{4m\gamma k_B T}{h^2} & -\frac{i\gamma}{h} \\ \frac{i\gamma}{h} & \frac{\gamma}{4mk_B T} \end{pmatrix}, \qquad (2.16и)$$

па отуда и *проширеној* КЛ мастер једначини:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{h}[H, \rho] - \frac{i\gamma}{h}[x, \{p, \rho\}] - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\big[x, [x, \rho]\big] - \frac{\gamma}{4mk_B T}\big[p, [p, \rho]\big]. \qquad (2.16j)$$

Својствене вредности нове матрице су: 0, $\frac{(h^2+16{k_{Б}}^2 m^2 T^2)\gamma}{4h^2 k_{Б} m T}$. Отуда је матрица позитивно-семидефинитна, па омогућује препис у Линдбладов облик. Читаоцу се препушта да се у ово увери репродуковањем израза (2.16j), полазећи од Линдбладовог облика дисипатора са само једним Линдбладовим оператором: $L = (4mk_B T/h^2)^{1/2}x + i(4mk_B T)^{-1/2}p$.

НАПОМЕНА: Памтећи дефиницију Марковљевости (Дефиниција 20), то може да значи макар једну од следећих ствари: да динамика није потпуно позитивна, или да није растављива. Нешто прецизнији став следи на основи наредног задатка.

2.17 Показати да за неке кратке временске интервале динамика описана мастер једначином Калдеире и Легета може бити непозитивна.

Решење: Из мастер једначине (2.16а) непосредно следи:

$$\left\langle\varphi\left|\frac{d\rho}{dt}\right|\varphi\right\rangle = -\frac{i}{h}\langle\varphi|[H,\rho]|\varphi\rangle - \frac{i\gamma}{h}\langle\varphi|[x,\{p,\rho\}]|\varphi\rangle - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\langle\varphi|\big[x,[x,\rho]\big]|\varphi\rangle. \tag{2.17а}$$

Потражимо временску промену у почетном тренутку, $\left\langle\varphi\left|\frac{d\rho}{dt}\right|\varphi\right\rangle_{t=0}$, и у ту сврху одаберимо, у координатној репрезентацији, чисто почетно стање гаусијанског типа, $\rho(t=0) = |\theta\rangle\langle\theta|$:

$$\theta(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}. \tag{2.17б}$$

Одаберимо $|\varphi\rangle$ као нормирани вектор који се добија изводом $\theta(x)$ по x:

$$\varphi(x) = -\left(\frac{32a^{5}}{\pi}\right)^{1/4} xe^{-ax^2}. \tag{2.17в}$$

Како је (2.17в) непарна, а (2.17б) парна функција, њихов интеграл је једнак нули, тј., $\langle\theta|\varphi\rangle = 0$.

Распишимо десну страну (2.17а), прво у операторском облику, члан по члан:

$$\langle\varphi|[H,\rho]|\varphi\rangle = \langle\varphi|(H|\theta\rangle\langle\theta| - |\theta\rangle\langle\theta|H)|\varphi\rangle = 0. \tag{2.17г}$$

$$\langle\varphi|[x,\{p,\rho\}]|\varphi\rangle = \langle\varphi|(xp|\theta\rangle\langle\theta| - p|\theta\rangle\langle\theta|x + x|\theta\rangle\langle\theta|p - |\theta\rangle\langle\theta|px)|\varphi\rangle = -\langle\theta|x|\varphi\rangle\langle\varphi|p|\theta\rangle + \langle\varphi|x|\theta\rangle\langle\theta|p|\varphi\rangle, \tag{2.17д}$$

коначно,

$$\langle\varphi|\big[x,[x,\rho]\big]|\varphi\rangle = \langle\varphi|(x^2|\theta\rangle\langle\theta| + |\theta\rangle\langle\theta|x^2 - 2x|\theta\rangle\langle\theta|x)|\varphi\rangle = -2(\langle\theta|x|\varphi\rangle)^2, \tag{2.17ђ}$$

опет уз коришћење реалности одабраних таласних функција. Све ово у координатној репрезентацији гласи, истим редом:

$$-\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\int dx\,\varphi(x)\left(-ih\frac{d}{dx}\right)\theta(x)+$$
$$\int dx\,\varphi(x)x\theta(x)\int dx\,\theta(x)\left(-ih\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)=$$
$$\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\left(-\left(\int dx\,\theta(x)\left(-ih\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^{*}+\int dx\,\theta(x)\left(-ih\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)=$$
$$-2ih\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\int dx\,\theta(x)\left(\frac{d}{dx}\varphi(x)\right).$$

$$-2\left(\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\right)^{2}. \qquad (2.17е)$$

Сменом у десну страну (2.17а) се добија:

$$-\frac{i\gamma}{h}(-2ih)\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\left(\int dx\,\theta(x)\left(\frac{d}{dx}\varphi(x)\right)\right)-$$
$$\frac{2mk_BT}{h^2}\left(-2\left(\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\right)^{2}\right)=$$
$$-2\gamma\left(\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\right)\left(\int dx\,\theta(x)\left(\frac{d}{dx}\varphi(x)\right)\right)+\frac{4m\gamma k_BT}{h^2}\left(\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)\right)^{2}.$$

(2.17ж)

Прорачун интеграла је једноставан:

$$\int dx\,\theta(x)x\varphi(x)=-\frac{1}{2\sqrt{a}},\int dx\,\theta(x)\left(\frac{d}{dx}\varphi(x)\right)=-\sqrt{a}, \qquad (2.17з)$$

што сменом у (2.17ж) коначно даје:

$$-\gamma+\frac{m\gamma k_BT}{h^2}\frac{1}{a}. \qquad (2.17и)$$

Израз (2.17и) може постати мањи од нуле увећањем вредности за a (тј., „уоштрењем“ гаусијана), са лимесом ($a\to\infty$): $-\gamma<0$.

Памтећи да је почетна вредност $\langle\varphi|\rho(0)|\varphi\rangle=|\langle\theta|\varphi\rangle|^2=0$, постоји мали временски тренутак t за који важи:

$$\langle\varphi|\rho(t)|\varphi\rangle\approx\langle\varphi|\rho(0)|\varphi\rangle-\gamma t=-\gamma t<0. \qquad (2.17ј)$$

Дакле, за неки врло мали временски тренутак (за који још важи (2.17j)), динамика описана мастер једначином Калдеире и Легета може бити непозитивна – не само да није ПП, већ за такве временске тренутке $\rho(t)$ није позитиван(-семидефинитни) оператор, те и не може, по дефиницији, бити ни статистички оператор.

Ово не значи да се уочена мањкавост динамике нужно испољава у применама на физичке моделе. Ипак, она представља симптом суптилности појма квантне дисипације коју описује други члан у мастер једначини, у вези са чим видети Задатак 4.23.

НАПОМЕНА: Непозитивност динамике имплицира њену непотпуну позитивност. Тиме је изоштрен закључак претходног задатка, али није проверена растављивост динамике описане Калдеира-Легетовом мастер једначином.

2.18 Најопштији облик потпуно позитивног динамичког пресликавања које сачувава траг статистичког оператора за „гаусијанске“ системе задат је изразом (у интеракционој слици):

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{T}exp\left\{\int_0^t d\tau \int_0^t ds \sum_{j,k} D_{jk}(\tau,s)\left[A_L^k(s)A_R^j(\tau) - \theta_{\tau s}A_L^j(\tau)A_L^k(s) - \theta_{s\tau}A_R^k(s)A_R^j(\tau)\right]\right\}; \qquad (2.18a)$$

$\theta_{\tau s}$ означава Хевисајдову тета функцију за $\tau > s$, а супероператори $A_L^k(s)A_R^j(\tau)[\rho] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{A}_k(s)\rho\mathrm{A}_j(\tau)$, за операторе система $\mathrm{A}_k(s)$, $\mathrm{A}_j(\tau)$, и аналогно за остале супероператоре у експоненту, где индекс L означава оператор система са леве, а R са десне стране у односу на статистички оператор ρ. Доказати да, ако је корелациона функција сразмерна временској делта функцији, $D_{jk}(\tau,s) = D_{jk}(\tau)\delta(\tau - s)$, разматрана динамика постаје Марковљева.

Решење: Под „гаусијанским системима“ подразумевају се физички модели чији су хамилтонијани највише квадратног, укључујући билинеарног, облика по опсерваблама система; хамилтонијан хармонијског осцилатора је такав, док се билинеарност тиче тензорског производа линеарних оператора у интеракционом хамилтонијану систем+окружење. Такви хамилтонијани, за затворен систем, сачувавају гаусијански карактер (почетног) стања отвореног система.

Уз Ајнштајнову конвенцију о поновљеним коефицијентима, непосредном сменом $D_{jk}(\tau,s) = D_{jk}(\tau)\delta(\tau - s)$ у (2.18а) се добија:

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{T}exp\left\{\int_0^t d\tau \int_0^t ds\, D_{jk}(\tau)\delta(\tau - s)\left[A_L^k(s)A_R^j(\tau) - \theta_{\tau s}A_L^j(\tau)A_L^k(s) - \theta_{s\tau}A_R^k(s)A_R^j(\tau)\right]\right\} = \mathcal{T}exp\left\{\int_0^t d\tau\, D_{jk}(\tau)\left[A_L^k(\tau)A_R^j(\tau) - \frac{1}{2}A_L^j(\tau)A_L^k(\tau) - \frac{1}{2}A_R^k(\tau)A_R^j(\tau)\right]\right\}, \qquad (2.18б)$$

где је коришћена уобичајена дефиниција: $\theta_{\tau=s} = 1/2$.

Узимањем извода израза (2.18б) по времену:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}_t = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{T}exp\left\{\int_0^t d\tau\, D_{jk}(\tau)\left[A_L^k(\tau)A_R^j(\tau) - \frac{1}{2}A_L^j(\tau)A_L^k(\tau) - \frac{1}{2}A_R^k(\tau)A_R^j(\tau)\right]\right\}\right).$$

(2.18в)

Како је у Задацима 2.6 и 2.7 истакнуто: временско уређење подразумева скраћени облик итеративно добијеног записа, који потиче од диференцијалне једначине, и њој је математички еквивалентан. Овде та диференцијална једначина има облик:

$$\frac{d\mathcal{M}_t}{dt} = \left(D_{jk}(t)\left[A_L^k(t)A_R^j(t) - \frac{1}{2}A_L^j(t)A_L^k(t) - \frac{1}{2}A_R^k(t)A_R^j(t)\right]\right)\mathcal{M}_t. \qquad (2.18г)$$

Деловањем на почетно стање $\rho(0)$, израз (2.18г) води мастер једначини:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{M}_t}{dt}[\rho(0)] = \left(D_{jk}(t)\left[A_L^k(t)A_R^j(t) - \frac{1}{2}A_L^j(t)A_L^k(t) - \frac{1}{2}A_R^k(t)A_R^j(t)\right]\right)\mathcal{M}_t[\rho(0)] \equiv \left(D_{jk}(t)\left[A_L^k(t)A_R^j(t) - \frac{1}{2}A_L^j(t)A_L^k(t) - \frac{1}{2}A_R^k(t)A_R^j(t)\right]\right)\rho(t). \qquad (2.18д)$$

С обзиром на дефиниције деловања супероператора, непосредно следи коначан облик мастер једначине:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \equiv D_{jk}(t)\left[\mathrm{A}_k(t)\rho(t)A_j(t) - \frac{1}{2}A_j(t)A_k(t)\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)A_k(t)A_j(t)\right], \tag{2.18ђ}$$

Како је матрица $\left(D_{jk}(t)\right)$ позитивно-семидефинитна (за свако t), задатак је завршен, јер је (2.18ђ) мастер једначина („првог стандардног“) Линдбладовог облика, тј., представља Марковљево динамичко пресликавање.

НАПОМЕНА: Гаусијански системи подразумевају да је окружење топлотно купатило међусобно неинтерагујућих хармонијских осцилатора (тј., бозонски систем). Испоставља се да за такво окружење *само* „дираковски оштра“ корелациона функција $D_{jk}(\tau, s)$ води Марковљевој динамици. То јест, све друге математичке функције воде немарковљевој динамици, тј., не-Линдбладовој форми мастер једначине за отворени систем[14].

2.19 Доказати да Накаџима-Цванциг пројектори за различите дводелне структуре целине „систем+окружење“, међусобно не комутирају.

Решење: Размотримо две могуће дводелне структуре једног сложеног система, $\mathcal{C} = S + E$, $\mathcal{C} = S' + E'$, где су оба система E и E' довољно „велики“ да могу играти улогу окружења за (отворене) системе S и S'. Задатак је изучити да ли пројектори уведени општим поступком од стране Накаџиме и Цванцига, а који се тичу различитих структура, могу међусобно да комутирају. Ако са $\mathcal{P}$ означимо пројектор за прву, а са $\mathcal{P}'$ пројектор за другу структуру, задатак је проверити да ли важи једнакост:

$$[\mathcal{P}, \mathcal{P}']\rho(t) = 0, \forall t, \tag{2.19а}$$

за стање целине $\rho(t)$.

---

[14] L. Ferialdi, Phys. Rev. A **95**, 052109 (2017).

Уведимо ознаке: $\rho_P(t) \equiv \mathcal{P}\rho(t)$ и $\rho_{P'}(t) \equiv \mathcal{P}'\rho(t)$. Тада се комутирање своди на једнакост: $\mathcal{P}'\rho_P(t) = \mathcal{P}\rho_{P'}(t), \forall t$. Независно од облика стања $\rho_P(t)$ и $\rho_{P'}(t)$, по дефиницији пројектовања важе једнакости:

$$\mathcal{P}'\rho_P(t) = tr_{E'}\big(\rho_P(t)\big) \otimes \rho_{E'} \equiv \rho_{S'} \otimes \rho_{E'}, \qquad (2.19б)$$

$$\mathcal{P}\rho_{P'}(t) = tr_E\big(\rho_{P'}(t)\big) \otimes \sigma_E \equiv \sigma_S \otimes \sigma_E. \qquad (2.19в)$$

Тако комутативност имплицира једнакост:

$$\rho_{S'} \otimes \rho_{E'} = \sigma_S \otimes \sigma_E, \forall t. \qquad (2.19г)$$

Међутим, релативност сплетености (за чиста стања) и релативност дискорда (за мешана стања), указује на то да једнакост (2.19г) може, ако уопште, важити само за неке посебне временске тренутке. То јест, стање које је тензорског производа за једну структуру, практично никада (за дати временски тренутак) није облика тензорског производа за било коју другу структуру сложеног система $\mathcal{C}$. Другачије исказано, неједнакост

$$\rho_{S'} \otimes \rho_{E'} \neq \sigma_S \otimes \sigma_E, \qquad (2.19д)$$

важи за већину временских тренутака (унитарне) динамике сложеног система $\mathcal{C}$. Отуда следи некомутативност пројектора за различите дводелне структуре произвољног сложеног система $\mathcal{C}$.

НАПОМЕНА: Релативност квантне сплетености, као и дискорда, значи да *корелације нису инваријанте промене структуре* сложеног система. То јест, једно квантно стање (у неком тренутку) носи корелације које имају различит „износ“ за различите структуре дводелног система. На пример, ако је стање за једну структуру облика тензорског производа (нема никаквих корелација), за неку другу структуру, то исто стање, носи квантне корелације (сплетеност за чиста, тј., дискорд за мешана стања). Ово се назива релативност квантних корелација; релативност сплетености је више пута откривена[15] у различитим контекстима, док је релативност дискорда успостављена у[16].

---

[15] J. Jeknić-Dugić et al, Quantum structures. A view of the quantum world, LAP, Saarbrucken, 2013.

[16] M. Dugić et al, Sci. China PMA **56**, 732 (2013).

2.20 Показати да ако је динамика подсистема S потпуно позитивна, да динамика подсистема S', исте изоловане целине, (типично) неће бити потпуно позитивна.

Решење: Системи S и S', ако припадају истој изолованој целини, $\mathcal{C}$, дефинишу различите структуре те целине, тј., $\mathcal{C} = S + E$, $\mathcal{C} = S' + E'$, и све док се системи разликују по својим степенима слободе (могу имати и неке заједничке), разликују им се и окружења; симболично, $S \neq S' \Leftrightarrow E \neq E'$. Нека се динамика целине тиче временског интервала $[0, t]$. Тада ПП динамике система S *захтева* да је почетно стање целине за ову структуру облика тензорског производа [2,4], видети и Задатак 21 (за континуалне системе):

$$\rho(0) = \sigma_S \otimes \sigma_E. \tag{2.20а}$$

Сходно релативности корелација, типично (са ретким изузецима):

$$\rho(0) \neq \rho_{S'} \otimes \rho_{E'}, \tag{2.20б}$$

па отуда динамика отвореног система S' (и то под условом да систем E' уопште може играти улогу (довољно великог) окружења), не може бити потпуно позитивна. Важи и обрнуто.

Ако се може десити да је у неком каснијем тренутку $t_0 \in [0, t]$ стање

$$\rho(t_0) = \rho_{S'} \otimes \rho_{E'}, \tag{2.20в}$$

Онда је дозвољено да, почев од тренутка t_0, динамика система S' буде потпуно позитивна (за временски интервал $[t_0, t]$). Оваква врста потпуне позитивности се назива „евентуално потпуно позитивна“ динамика [2].

НАПОМЕНА: Свака редефиниција отвореног система уводи ново окружење. То важи и када се отвореном систему S придружи једна једина квантна честица из окружења, или му се једна честица „одузме“ и придружи окружењу. Тада ступа на снагу релативност корелација; један изузетак од релативности корелација су случајеви када додата/одузета честица није корелисана са окружењем/остатком-система. За вишеделне структуре сложеног система, релативност сплетености чистог стања целине води, тзв., моногамији сплетености која је суштински чинилац протокола квантне телепортације [3]. Наиме, у трокубитном систему, за структуру 1+(2+3), ако је почетно стање облика тензорског производа:

$$|\quad\rangle_1 \otimes |\quad\rangle_{23}, \tag{2.20г}$$

где су кубити 2 и 3 међусобно сплетени, тада то исто стање за структуру (1+2)+3 добија сплетени облик:

$$\sum_i c_i \,|i\rangle_{12} \otimes |i\rangle_3, \tag{2.20д}$$

где су стања $|i\rangle_{12}$ у (2.20д) сплетена, као и корелисана са стањима $|i\rangle_3$ кубита 3. Уочити да је у (2.20г) кубит 2 сплетен само са кубитом 3, а у (2.20д) сплетен само са кубитом 1; слично, у (2.20г) кубит 3 је сплетен са кубитом 2, а у (2.20д) са целином 1+2 – ово је пример, такозване, *моногамије* квантне сплетености чистих стања. Наравно, овде ниједан кубит није довољно „велики“ да би играо улогу топлотног купатила.

2.21 Показати да почетне корелације у дводелном коначнодимензионалном систему воде непотпуно позитивној динамици подсистема.

Решење: Најопштији запис корелисаног стања пара коначнодимензионалних система:

$$\rho_{12} = \frac{1}{MN}\left(I_{12} + \alpha_i \sigma_{1i} \otimes I_2 + \beta_j I_1 \otimes \tau_{2j} + \gamma_{ij} \sigma_{1i} \otimes \tau_{2j}\right). \tag{2.21а}$$

где су M и N димензије простора стања подсистема 1 и 2, редом, а опсервабле σ_{1i} и τ_{2j} чине базисе алгебри оператора подсистема; понављање индекса у производу подразумева сабирање по тим индексима. Уочити да $\gamma_{ij} \neq \alpha_i \beta_j$ за корелисано стање. За $\gamma_{ij} = \alpha_i \beta_j \forall i, j$, израз (2.21а) се може превести у облик који је тензорски производ стања:

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \equiv \frac{1}{M}(I_1 + \alpha_i \sigma_{1i}) \otimes \frac{1}{N}\left(I_2 + \beta_j \tau_{2j}\right). \tag{2.21б}$$

Дозвољено је да стања подсистема буду чиста стања; у случају пара кубита то значи да је $\sum_i \alpha_i^2 = 1$, док су σ_{1i} Паулијеви оператори (и аналогно за други кубит).

Претпостављамо да је систем 1+2 изолована целина, па тада динамика првог подсистема (све је аналогно за други) је општег облика:

$$\rho_1 = tr_2(U\rho_{12}U^{+}) = \sum_m \langle m|_2\, U\rho_{12}U^{+}|m\rangle_2. \tag{2.21в}$$

Користећи (2.21а,б), можемо писати:

$$\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2 + \frac{1}{MN}\left(\gamma_{ij} - \alpha_i\beta_j\right)\sigma_{1i} \otimes \tau_{2j}. \tag{2.21г}$$

Уочити да други члан са десне стране (2.21г) управо истиче разлику између корелисаног (2.21а) и некорелисаног (2.21б) стања. Сменом (2.21г) у (2.21в) непосредно следи:

$$\rho_1 = \sum_m \langle m|_2\, U\left(\rho_1 \otimes \rho_2 + \frac{1}{MN}\left(\gamma_{ij} - \alpha_i\beta_j\right)\sigma_{1i} \otimes \tau_{2j}\right)U^{+}|m\rangle_2 =$$
$$\sum_m \langle m|_2\, U(\rho_1 \otimes \rho_2)U^{+}|m\rangle_2 + \sum_m \langle m|_2\, U\left(\frac{1}{MN}\left(\gamma_{ij} - \alpha_i\beta_j\right)\sigma_{1i} \otimes \tau_{2j}\right)U^{+}|m\rangle_2\,. \tag{2.21д}$$

Како је први члан са десне стране стандардни члан који даје потпуно позитивну динамику (тј., може се записати у Краусов облик), стање (2.21д) представља динамику отвореног система у интегралном облику:

$$\rho_1(t) = \sum_m K_k(t)\,\rho_1(0)K_k^{+}(t) + \sum_m \langle m|_2\, U\left(\frac{1}{MN}\left(\gamma_{ij} - \alpha_i\beta_j\right)\sigma_{1i} \otimes \tau_{2j}\right)U^{+}|m\rangle_2, \tag{2.21ђ}$$

у којој се појављују Краусови оператори, *али* и додатни члан који укупну динамику чини непотпуно позитивном.

Додатни члан истиче *значај почетних корелација* и не зависи од почетног стања $\rho_1(0)$. То јест, додатни члан зависи само од корелација садржаних у параметру $\gamma_{ij} \neq 0$ – што није информација која би се могла добити локалним мерењем, било на на систему 1, било на систему 2. При томе, и ово би требало нагласити, додатни члан може бити једнак нули за нека посебно одабрана почетна стања ρ_{12}; тада се израз (2.21ђ) своди на Краусов облик. Али ово подразумева *ужи скуп почетних стања* отвореног система, те се тако добијена потпуна позитивност (2.21ђ) тиче и *посебног* *домена динамике* отвореног система: не тиче се сваког могућег почетног стања (домен није цео Банахов простор статистичких оператора система), већ само посебно одабраног скупа стања отвореног система 1.

НАПОМЕНА: Као што је више пута наглашено: потпуна позитивност се везује за динамичка пресликавања која као домен имају цео Банахов простор статистичких оператора отвореног система, тзв. УДП, Дефиниција 25.

2.22 За разматрања уведена у претходном задатку извести одговарајућу мастер једначину.

Решење: Диференцијални облик закона кретања се може непосредно добити диференцирањем по времену датог интегралног облика кретања, израза (2.21ђ). У ту сврху краће запишимо десну страну (2.21ђ), са истим распоредом чланова:

$$\rho_1(t) = \mathcal{G}_{(t,0)}\rho_1(0) + \xi(t). \qquad (2.22а)$$

Сходно теоријским основама и Задатку 2.9, диференцијални облик динамике, тј., првог члана са десне стране (2.22а), подразумева $\mathcal{G}_{(t,t)} = \mathcal{I}, \forall t$, као и да се подразумева постојање инверзног пресликавања, тј., постојање $\mathcal{G}^{-1}{}_{(t,0)}$. Тада из (2.22а) непосредно следи:

$$\rho_1(0) = \mathcal{G}^{-1}{}_{(t,0)}(\rho_1(t) - \xi(t)).$$

Отуда извод по времену (2.22а) даје:

$$\frac{d\rho_1(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}_{(t,0)}}{\partial t}\left(\mathcal{G}^{-1}{}_{(t,0)}(\rho_1(t) - \xi(t))\right) + \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \qquad (2.22б)$$

Скраћено:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}\right)(\rho_1(t) - \xi(t)) = 0, \qquad (2.22г)$$

где је супероператор $\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{G}_{(t,0)}}{\partial t}\mathcal{G}^{-1}_{(t,0)}$. Сходно (2.22а), нехомогени члан $\xi(t)$ не зависи од почетног стања $\rho_1(0)$ те је једначина (2.22г) линеарна нехомогена диференцијална једначина првог реда чија су решења одређена почетним корелацијама у укупном, изолованом систему.

2.23 Двокубитни изоловани систем дефинисан је хамилтонијаном:

$$H = \frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2 + \frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2. \tag{2.23а}$$

Наћи коначна стања овог система у тренутку $t = \pi/2$ за почетно стање: (а) $\rho_{12} = |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|11\rangle\langle 11|$, и (б) $\sigma_{12} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, где је$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$.

Решење: Унитарни оператор генерисан хамилтонијаном (2.23а) лако следи из, лако доказивог, уочавања да је $H^{2n} = I, \forall n$:

$U(t) = e^{-itH} = \cos t - iH \sin t$.

Тада у тренутку $t = \pi/2$, $U(\pi/2) = -iH$, па коначна стања (уз занемаривање глобалне „фазе“, тј., множиоца „i“) у том тренутку гласе:

(а) $\left(\frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2 + \frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2\right)(|\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|11\rangle\langle 11|)\left(\frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2 + \frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2\right) = |\alpha|^2\left(\frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2\right)|00\rangle\langle 00|\left(\frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2\right) + |\beta|^2\left(\frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2\right)|11\rangle\langle 11|\left(\frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2\right) = |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|10\rangle\langle 10| = \left(|\alpha|^2|0\rangle_1\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle_1\langle 1|\right) \otimes |0\rangle_2\langle 0|$.

(б) $\left(\frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2 + \frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2\right)(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle) = \alpha\left(\frac{1}{2}(I_1 + Z_1) \otimes I_2\right)|00\rangle + \beta\left(\frac{1}{2}(I_1 - Z_1) \otimes X_2\right)|11\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle = \left(\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1\right) \otimes |0\rangle_2$.

Очигледно је да су оба „коначна“ стања целине облика тензорског производа. Отуда три наука: *У неком тренутку*: (1) унитарна динамика целине може водити укидању корелација подсистема (независно од

„рекуренције“ дефинисане у Задатку 1.13), (2) динамика отвореног система може водити прочишћењу почетног мешаног стања (за систем 2 у оба случаја, а за систем 1 у случају (б)), и (3) може се уочити разлика у динамици за оба подсистема, иако су почетна стања оба подсистема иста за оба случаја, (а) и (б). Формално, $tr_2\rho_{12}(0) = \rho_1(0) = tr_2\sigma_{12}(0)$ и $tr_1\rho_{12}(0) = \rho_2(0) = tr_1\sigma_{12}(0)$, али $tr_2\rho_{12}(t) \neq tr_2\sigma_{12}(t)$ и $tr_1\rho_{12}(t) \neq tr_1\sigma_{12}(t)$. За уочену разлику коначних стања, за оба подсистема, одговорне су почетне корелације. То јест, како се лако може показати, да је почетно стање целине било тензорски производ, у сваком каснијем тренутку би стања, оба подсистема, била *једнозначна* - важило би $tr_2\rho_{12}(t) = tr_2\sigma_{12}(t)$ као и $tr_1\rho_{12}(t) = tr_1\sigma_{12}(t)$.

НАПОМЕНА: Трећа горња напомена, (3), је илустрација општег резултата Задатка 2.22 – динамике у интегралном облику, на примеру два кубита. Резултат овог задатка можемо исказати и на још један начин: сходно Задатку 1.1, у овом задатку су заправо уочене *последице квантне кохеренције*, јер стања уведена у (а) и (б) су баш стања разматрана у оквирима квантне кохеренције, тј., $\sigma_{12} - \rho_{12}$=„интерферренциони члан“, израз (1.1а).

2.24 Два хамилтонијана, $\hat{H}$ и $\hat{H}'$, задовољавају две временски зависне Шредингерове једначине:

$$i\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle, i\frac{d|\varphi\rangle}{dt} = \hat{H}'|\varphi\rangle. \qquad (2.24а)$$

Ако су стања повезана унитарном трансформацијом, $|\varphi\rangle = \hat{V}|\psi\rangle$, наћи одговарајућу везу између хамилтонијана. Извести услове под којима ће неко стање $|\psi_0\rangle = \hat{V}^+|\varphi_0\rangle$ бити у језгру хамилтонијана $\hat{H}$, ако је стање $|\varphi_0\rangle$ у језгру хамилтонијана $\hat{H}'$.

Решење: Полазећи од друге једначине у (2.24а),

$$i\frac{d(\hat{V}|\psi\rangle)}{dt} = i\frac{d|\varphi\rangle}{dt} = \hat{H}'|\varphi\rangle = \hat{H}'\big(\hat{V}|\psi\rangle\big). \qquad (2.24б)$$

Из леве стране (2.24б) следи: $i\frac{d(\hat{V}|\psi\rangle)}{dt} = i\frac{d\hat{V}}{dt}|\psi\rangle + \hat{V}i\frac{d|\psi\rangle}{dt} = i\frac{d\hat{V}}{dt}|\psi\rangle + \hat{V}\hat{H}|\psi\rangle$,

где је коришћена прва Шредингерова једначина у изразу (2.24а). Сменом ове једнакости у (2.24б) се добија:

$$i\left(\frac{dV}{dt}|\psi\rangle - iVH|\psi\rangle\right) = H'V|\psi\rangle. \tag{2.24в}$$

Израз (2.24в) мора да важи за свако стање $|\psi\rangle$ (тј., за свако решење Шредингерове једначине), па следи тражена операторска једнакост:

$$\hat{H}' = i\dot{\hat{V}}\hat{V}^{+} + \hat{V}\hat{H}\hat{V}^{+}. \tag{2.24г}$$

Нека сада постоји, макар једно нетривијално (нормирано), стање $|\varphi_0\rangle$ за које важи: $\hat{H}'|\varphi_0\rangle = 0$. Применом једнакости (2.24г) на овај услов добија се:

$$0 = \hat{H}'|\varphi_0\rangle = \left(i\dot{\hat{V}}\hat{V}^{+} + \hat{V}\hat{H}\hat{V}^{+}\right)|\varphi_0\rangle = \left(i\dot{\hat{V}} + \hat{V}\hat{H}\right)|\psi_0\rangle. \tag{2.24д}$$

Отуда одмах следи и довољан услов за важење $\hat{H}|\psi_0\rangle = 0$:

$$\dot{\hat{V}}|\psi_0\rangle = \dot{\hat{V}}\hat{V}^{+}|\varphi_0\rangle = 0. \tag{2.24ђ}$$

2.25 Временски зависан хамилтонијан једног кубита репрезентован је матрицом (у некој репрезентацији):

$$H = \begin{pmatrix} \omega & \alpha e^{i\nu t} \\ \alpha e^{-i\nu t} & -\omega \end{pmatrix}. \tag{2.25а}$$

Користећи поступак претходног задатка, превести овај хамилтонијан у облик у којем неће бити временске зависности.

Решење: У ознакама претходног задатка, овде је задатак наћи хамилтонијан $\hat{H}'$ за хамилтонијан задат изразом (2.25а). Додатни захтев у овом задатку је да нови хамилтонијан, $\hat{H}'$, буде временски независан. У том смислу је полазна тачка израз (2.24г).

Одаберимо унитарни оператор у истој матричној репрезентацији:

$$V = \begin{pmatrix} e^{if_1 t} & 0 \\ 0 & e^{if_2 t} \end{pmatrix}, \tag{2.25б}$$

Сада други члан са десне стране (2.24г) добија облик:

$$\begin{pmatrix} e^{if_1t} & 0 \\ 0 & e^{if_2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \alpha e^{i\nu t} \\ \alpha e^{-i\nu t} & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-if_1t} & 0 \\ 0 & e^{-if_2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & \alpha e^{i(\nu+f_1-f_2)t} \\ \alpha e^{-i(\nu+f_1-f_2)t} & -\omega \end{pmatrix}. \qquad (2.25в)$$

Да би нови хамилтонијан био временски независан, довољно је изабрати $\nu + f_1 - f_2 = 0$, зашта стоји на располагању непребројиво много могућности. Изаберимо, нпр., $f_1 = -\nu/2 = -f_2$. Тада, сходно (2.24г), нови хамилтонијан гласи:

$$H' = i \cdot i\frac{\nu}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega & \alpha \\ \alpha & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega + \nu/2 & \alpha \\ \alpha & -(\omega + \nu/2) \end{pmatrix}, \qquad (2.25г)$$

чиме је добијен временски независан хамилтонијан.

Поступак се може применити и на произвољно-димензионални систем, избором унитарног оператора који представља уопштење (2.25б). Тада се решавање ШЈ за H' и φ' може лакше обавити, с тим што се коначна решења добијају инверзном трансформацијом, тј., $|\varphi\rangle = V^{+}|\varphi'\rangle$.

НАПОМЕНА: Овде разматрани поступак, који се назива „прелазом у ротирајући референтни систем", се обично везује за квантну оптику, тј., унутрашња стања атома под утицајем спољашње светлости, али се једнако тиче сваког система чија се динамика може свести на дводимензионални простор (нпр., квантне тачке и друге врсте „вештачких атома", тј., моделе кубита [4]).

2.26 Доказати да се за пар отворених система могу записати независне Марковљеве мастер једначине ако и само ако та два система међусобно не интерагују и њихова окружења међусобно не интерагују.

Решење: Речи „пар отворених система" је исто што и „дводелни отворени систем", како за заједничко окружење, тако и за независна окружења система, тј., подсистема отвореног дводелног система. Зато ћемо надаље говорити у терминима једног, дводелног отвореног система.

Полазна претпоставка је да је отворени систем Марковљеве динамике, тј., да је описан мастер једначином Линдбладовог облика (у Шредингеровој, или интеракционој слици, $h = 1$):

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \sum_{\omega,k,l} \gamma_{kl}(\omega) \left(A_l(\omega)\rho A_k^{+}(\omega) - \frac{1}{2}\{A_k^{+}(\omega)A_l(\omega),\rho\} \right) \qquad (2.26а)$$

под условом да је матрица $\left(\gamma_{kl}(\omega)\right)$ позитивна(-семидефинитна) [2,4].

Тако задатак постаје, полазећи од мастер једначине (2.26а), извести мастер једначине за подсистеме облика (2.26а), али тако да оне не садрже варијабле, или параметре који на неки начин зависе од другог подсистема, у било ком тренутку времена. Зато ћемо стање целине тражити у облику тензорског производа, $\rho_1(t) \otimes \rho_2(t)$, у сваком тренутку времена.

Проучимо два случаја: да су подсистеми у интеракцији, или да имају заједничко окружење.

Заједничка интеракција подсистема, тј., интеракциони хамилтонијан, како у Шредингеровој, тако и у интеракционој слици, неизбежно уводи параметре који зависе од оба подсистема. За сваку интеракциону слику, оператор H је облика $\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} P_{1\alpha} \otimes \Pi_{2\beta}$. Тада комутатор у (2.26а) даје:

$$tr_2\left(\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\, tr_2\left(\Pi_{2\beta}\rho_2\right)[P_{1\alpha},\rho_1]\right),$$

са очигледном зависношћу од стања другог подсистема. То значи да је одсуство интеракције између подсистема потребан услов за независне динамике.

Општи поступак микроскопског (“ab initio”) извођења мастер једначина води следећим закључцима [2,4]. Ако подсистеми не интерагују, али имају заједничко окружење, оператори $A_l(\omega)$ у изразу (2.26а) биће дати збиром, $A_{1l}(\omega) + A_{2l}(\omega)$, или тензорским производом, $A_{1l}(\omega) \otimes A_{2k}(\omega)$, оператора подсистема. У оба случаја, у мастер једначини, појавиће се „мешани“ чланови типа $\gamma_{kl}(\omega)A_{1l}(\omega)\rho A_{2k}^{+}(\omega)$, где су константе пригушења општег облика: $\gamma_{kl}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{i\omega s} tr(B_k^{+}(s)B_l(0)\rho_E)$, где се појављују оператори окружења задати обликом интеракције система са окружењем. Тада траг израза (2.26а) по, нпр., другом систему, даје за мешане чланове израз $\gamma_{kl}(\omega)tr_2\big(\rho A^+_{2k}(\omega)\big)A_{1l}(\omega)\rho_1$, који нису општег облика $\gamma_{kl}(\omega)A(\omega)\rho A^+(\omega)$ који би могао да води Марковљевој динамици типа (2.26а). Дакле, међусобно независна (неинтерагујућа) окружења су потребан услов за независне динамике два отворена система.

Довољност уочених потребних услова за независну динамику два система следи из наредних разматрања.

Модел који нас занима састоји се од два неинтерагујућа изолована система , структурно: $C = (S_1 + E_1) + (S_2 + E_2)$, где су претпостављене слабе *локалне* интеракције система и окружења, тј., интеракција у систему C је најопштијег облика: $H_{int} = \left(\sum_k A_{S_1k} \otimes B_{E_1k}\right) \otimes I_{S_2E_2} + I_{S_1E_1} \otimes \left(\sum_k A_{S_2k} \otimes B_{E_2k}\right)$. Потпуно аналогно (2.26а), појавиће се оператори $A_{1l}(\omega)$ и $A_{2k}(\omega)$ у дисипатору мастер једначине. За разлику од горе разматраних случајева, „мешани“ чланови у мастер једначини нестају. Наиме, тада општи запис фактора пригушења, $\gamma_{kl}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{i\omega s} tr(B^+_k(s)B_l(0)\rho_E)$, води мешаним члановима облика: $\gamma_{kl}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{i\omega s} tr(B^+_{2k}(s)B_{1l}(0)\rho_E)$, што, у складу са општим претпоставкама о окружењу $(\rho_E = \rho_{E_1}(t) \otimes \rho_{E_2}(t))$ даје: $tr(B^+_{2k}(s)B_{1l}(0)\rho_E) = tr_2\big(B^+_{2k}(s)\rho_{E_2}\big)tr_1\big(B_{1l}(0)\rho_{E_1}\big) = 0$. То јест, фактори пригушења за мешане чланове су једнаки нули: $\gamma_{kl}(\omega)A_{1l}(\omega)\rho A^+_{2k}(\omega) = 0$, за сваки пар индекса k, l и за свако ω. Наравно, фактори пригушења који се тичу појединачних окружења су познатог општег облика, па како „мешани“ чланови нестају, преостају само чланови који се тичу појединачних подсистема. Претпоставка исте јачине интеракције (мерено јачином интеракције, α) као и дефиниције $\gamma_{ikl}(\omega) \equiv \alpha^2 \gamma_{ikl}(\omega), i = 1{,}2$, води изразу (2.26а) у облику:

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = -i[H,\rho] + \alpha^2 \sum_{\omega,k,l} \gamma_{1kl}(\omega) \Big(A_{1l}(\omega)\rho_{12}A^+_{1k}(\omega) - \frac{1}{2}\{A^+_{1k}(\omega)A_{1l}(\omega), \rho_{12}\}\Big) + \alpha^2 \sum_{\omega,k,l} \gamma_{2kl}(\omega) \Big(A_{2l}(\omega)\rho_{12}A^+_{2k}(\omega) - \frac{1}{2}\{A^+_{2k}(\omega)A_{2l}(\omega), \rho_{12}\}\Big) \equiv -i[H,\rho] + \mathcal{D}_1[\rho_{12}] + \mathcal{D}_2[\rho_{12}],$$

(2.26б)

где се подразумева: $A_{1l}(\omega) \equiv A_{1l}(\omega) \otimes I_2$ и $A_{2l}(\omega) \equiv I_1 \otimes A_{2l}(\omega)$.

Узимањем трага, нпр., по подсистему 2, $tr_2\mathcal{D}_2[\rho_{12}] = 0$, док $tr_2\mathcal{D}_1[\rho_{12}] = \mathcal{D}_1[\rho_1]$ је облика (2.26а), али за подсистем 1 (аналогно за подсистем 2), без чланова који би могли да зависе, било од подсистема 2, било од његовог окружења. Докажимо ово.

Прво размотримо дисипаторске делове једначине (2.26б). Вероватно је очигледно да узимање трага по другом подсистему води $tr_2\mathcal{D}_2[\rho_{12}] = 0$. У првом делу дисипатора у (2.26б), који се тиче првог подсистема, узимање трага води операцији $tr_2\rho_{12} = \rho_1$, као јединој промени. Отуда се појављује само дисипатор по првом подсистему, који јесте облика (2.26а).

Да бисмо размотрили комутаторски део, размотримо Шредингерову слику, у којој је оператор

$$H = H_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes H_2 + H_{LS}, \qquad (2.26\text{в})$$

при чему је Лембов померај општег облика $H_{LS} = \sum_{i,j,\omega} S_{ij}(\omega)\, A_i^+(\omega) A_j(\omega)$. Сходно горе реченом, као и дефиницији $S_{ij}(\omega) = \left(\gamma_{ij}(\omega) - \gamma_{ji}^*(\omega)\right)/2$, мешовити чланови нестају из Лембовог члана па се уместо (2.26в) добија:

$$H = H_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes H_2 + \sum_{i,j,\omega} S_{1ij}(\omega)\, A_{1i}^+(\omega) A_{1j}(\omega) \otimes I_2 + I_1 \otimes \sum_{i,j,\omega} S_{2ij}(\omega)\, A_{2i}^+(\omega) A_{2j}(\omega) \equiv H^{(1)} \otimes I_2 + I_1 \otimes H^{(2)}. \qquad (2.26\text{г})$$

Читаоцу се оставља да докаже да смена (2.26г) у (2.26а), уз узимање трага по подсистему 2 даје:

$$tr_2[H, \rho] = \left[H^{(1)}, \rho_1\right].$$

Дакле, доказали смо довољност услова истакнутих у поставци задатка: под датим претпоставкама, мастер једначина за подсистем 1 (једнако и за подсистем 2) је потпуно независна од динамике подсистема 2 и облика је:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -i\left[H^{(1)}, \rho_1\right] + \sum_{\omega,k,l} \gamma_{1kl}(\omega) \left(A_{1l}(\omega)\rho_1 A_{1k}^+(\omega) - \frac{1}{2}\{A_{1k}^+(\omega) A_{1l}(\omega), \rho_1\}\right), \qquad (2.26\text{д})$$

где су матрице $\left(\gamma_{\alpha kl}(\omega)\right), \alpha = 1{,}2$, позитивно(семидефинитне), као непосредна последица (претпостављене) позитивне-семидефинитности матрице $\left(\gamma_{kl}(\omega)\right)$ која одговара једначини (2.26а). Тако је доказана тврдња задатка: два отворена система могу бити описана независним мастер једначинама АККО та два система међусобно не интерагују, имају независна окружења и та окружења међусобно не интерагују.

2.27 Задат је неки хамилтонијан својом спектралном формом, $\hat{H} = \sum_n E_n \hat{P}_n$. За произвољни ермитски оператор система, $\hat{A}$, уведимо оператор:

$$\hat{A}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega=E_n-E_{n'}} \hat{P}_{n'} \hat{A}\hat{P}_n \qquad (2.27\text{а})$$

где се сабирање врши по свим комбинацијама индекса n и n' који дају исту разлику сопствених енергија хамилтонијана (једноставности ради, бирамо $h = 1$), $\omega = E_{n'} - E_n$. Доказати важење следећих израза; (а) $\hat{A}^{+}(\omega) = -\hat{A}(\omega)$, (б) $\sum_\omega \hat{A}\,(\omega) = \hat{A}$, (в) $\left[\hat{H}, \hat{A}(\omega)\right] = -\omega\hat{A}(\omega), \left[\hat{H}, \hat{A}^{+}(\omega)\right] = \omega\hat{A}^{+}(\omega)$, (г) $e^{i\hat{H}t}\hat{A}(\omega)e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\omega t}\hat{A}(\omega), e^{i\hat{H}t}\hat{A}^{+}(\omega)e^{-i\hat{H}t} = e^{i\omega t}\hat{A}^{+}(\omega)$.

Решење: (а) Из дефиниције (2.27а) следи: $\hat{A}^{+}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\omega=E_n-E_{n'}} \hat{P}_{n'} \hat{A}\hat{P}_n\right)^{+} = \sum_{\omega=E_n-E_{n'}} \hat{P}_n \hat{A}\hat{P}_{n'} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}(-\omega)$; (б) $\hat{A} = \hat{I}\hat{A}\hat{I} = \left(\sum_{n'} \hat{P}_{n'}\right)\hat{A}\left(\sum_n \hat{P}_n\right) = \sum_{n,n'} \hat{P}_{n'} \hat{A}\hat{P}_n$. За сваку разлику $\omega = E_{n'} - E_n$ постоји једнозначан скуп оператора $\hat{P}_{n'}\hat{A}\hat{P}_n$, где скупови немају ниједан заједнички елемент. То јест, избор фреквенције ω једнозначно изабира скуп оператора $\hat{P}_{n'}\hat{A}\hat{P}_n$. Отуда следи груписање чланова у збиру $\sum_{n,n'} \hat{P}_{n'} \hat{A}\hat{P}_n$ по вредностима за фреквенције ω (при чему се за свако ω појављује и $-\omega$): $\hat{A} = \sum_{n,n'} \hat{P}_{n'} \hat{A}\hat{P}_n = \sum_\omega \hat{A}\,(\omega)$; (в) На основи спектралне форме хамилтонијана следи $\hat{H}\hat{P}_{n'} = E_{n'}\hat{P}_{n'}$ и $\hat{P}_n\hat{H} = E_n\hat{P}_n$,одакле сада лако следе задати изрази за комутаторе; (г) Коришћењем Бејкер-Хауздорфове леме следи израз:

$$e^{i\hat{H}t}\hat{A}(\omega)e^{-i\hat{H}t} = \hat{A}(\omega) + it\left[\hat{H},\hat{A}(\omega)\right] + \frac{1}{2}(it)^2\left[\hat{H},\left[\hat{H},\hat{A}(\omega)\right]\right] + \cdots = \hat{A}(\omega) - it\omega\hat{A}(\omega) + \frac{1}{2}(-it\omega)^2\hat{A}(\omega) + \cdots = e^{-i\omega t}\hat{A}(\omega),$$

где је коришћен комутатор доказан под (в). Аналогно следи и израз за $\hat{A}^{+}(\omega)$.

2.28 Задата је фамилија једнопараметарских, потпуно позитивних пресликавања, означених са Φ_t, на Банаховом простору оператора који делују над коначнодимензионалним Хилбертовим простором. Доказати:

(а) $\Phi(A^+A) \geq \Phi(A^+)\Phi(A),$ (2.28а)

(б) $\Phi(A^+A) \geq \Phi(A^+)\Phi^{-1}(I)\Phi(A),$ (2.28б)

за инвертибилно пресликавање Φ.

Решење:

(а) Сва потпуно позитивна пресликавања су контрактивна, што значи да су норме (индуковане, на дуалном Банаховом простору) $\|\Phi\| \leq 1$. Како за сва пресликавања важи $\|\Phi(\rho)\| \leq \|\Phi\|\,\|\rho\|$, за контрактивна (ПП пресликавања) важи $\|\Phi(\rho)\| \leq \|\rho\|$, за сваки статистички оператор ρ у Банаховом простору ових оператора. Без губљења општости, размотримо Краусов облик пресликавања са само једним Краусовим оператором: $\Phi(\rho) = \mathrm{K}\rho\mathrm{K}^+$. Тада очигледно важи за сва контрактивна (ПП) пресликавања неједнакост: $\|\mathrm{K}\rho\mathrm{K}^+\| \leq \|\rho\|$. Узмимо стандардну норму по трагу, тј., $\|A\|_1 = +tr\sqrt{A^+A}$. Како нас занимају само позитивно-семидефинитни оператори, стоји неједнакост за ову врсту норме: $tr(\mathrm{K}\rho\mathrm{K}^+) \leq tr(\rho)$, што је еквивалентно $tr(\mathrm{K}^+\mathrm{K}\rho - \rho) \leq 0$. Како ово важи за свако ρ, следи неједнакост $\mathrm{K}^+\mathrm{K} \leq \mathrm{I}$, што се тиче оператора на Хилбертовом простору, па значи: $(\varphi, \mathrm{K}^+\mathrm{K}\varphi) \leq (\varphi, I\varphi) = (\varphi, \varphi)$ за сваки вектор φ у коначнодимензионалном простору - где опет малом заградом означавамо скаларни производ вектора. То јест, доказали смо: $(\varphi, \mathrm{K}^+\mathrm{K}\varphi) = (\mathrm{K}\varphi, \mathrm{K}\varphi) \equiv \|\mathrm{K}\varphi\|^2 \leq (\varphi, \varphi) \equiv \|\varphi\|^2$.

Сада лако следи тражена неједнакост за произвољни оператор A алгебре оператора система, када важи усвојени Краусов облик пресликавања, $\Phi(*) = \mathrm{K} * \mathrm{K}^{+}$:

$$(\varphi', \Phi(\mathrm{A}^{+}\mathrm{A})\upvarphi') = (\varphi', \mathrm{K}\mathrm{A}^{+}\mathrm{A}\mathrm{K}^{+}\upvarphi') = (AK^{+}\varphi', \mathrm{A}\mathrm{K}^{+}\upvarphi') \equiv \|\varphi\|^{2} \geq (K\varphi, K\varphi) = (KAK^{+}\varphi', K\mathrm{A}\mathrm{K}^{+}\upvarphi') = (\varphi', (K\mathrm{A}^{+}\mathrm{K}^{+})(K\mathrm{A}\mathrm{K}^{+})\upvarphi') = (\varphi', \Phi(\mathrm{A}^{+})\Phi(\mathrm{A})\upvarphi'),$$

за сваки вектор $\upvarphi'$ из (коначнодимензионалног) Хилбертовог простора стања.

(б) Како је пресликавање позитивно, његова инвертибилност омогућује да се дефинише пресликавање $\Phi^{-1/2}$, тако да $\Phi^{-1/2}(\mathrm{I})\,\Phi^{-1/2}(\mathrm{I}) = \Phi^{-1}$. Уведимо пресликавање: $\Phi \to \Phi^{-1/2}\Phi\Phi^{-1/2}$. Тада тачка (а) непосредно даје:

$$\Phi^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{I})\Phi\left(A^{+}A\right)\Phi^{-\frac{1}{2}}(I) \geq \Phi^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{I})\Phi\left(A^{+}\right)\Phi^{-1}(\mathrm{I})\Phi(A)\Phi^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{I}).$$

Како ово важи за свако пресликавање Φ, непсоредно следи неједнакост (б).

НАПОМЕНА: За случај бесконачнодимензионалних простора стања видети, нпр., D.A. Lidar et al, Chem. Phys. **322**, 86 (2006).

2.29 Нека пресликавања из претходног задатка чине полугрупу чији је генератор означен са $\mathcal{L}$, тј., $\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$. Доказати важење неједнакости:

(i) $\mathcal{L}(A^{+}A) \geq \mathcal{L}(A^{+})A + A^{+}\mathcal{L}(A)$ (2.29а)

(ii) $\mathcal{L}(A^{+}A) \geq \mathcal{L}(A^{+})A + A^{+}\mathcal{L}(A) - A^{+}\mathcal{L}(I)A,$ (2.29б)

за временски тренутак врло близу почетног $t_0 = 0$.

Решење: Како за полугрупе важи једнакост (локалност у времену), $\dot{\Phi} = \mathcal{L}\Phi$, то тражење извода по (а) и (б) претходног задатка, води траженим изразима.

(i) $\dot{\Phi}(A^{+}A) = \mathcal{L}\Phi(A^{+}A) \geq \dot{\Phi}(A^{+})\Phi(A) + \Phi(A^{+})\dot{\Phi}(A) = (\mathcal{L}[\Phi(A^{+})])\Phi(A) + \Phi(A^{+})(\mathcal{L}[\Phi(A)])$.

Услов тренутка $t \approx 0$ поништава деловање пресликавања, тј., $\Phi_t = e^{\mathcal{L}t} \to \mathcal{I}$ када $t \to 0$, и води изразу:

$\mathcal{L}[A^{+}A] \geq \mathcal{L}[A^{+}]A + A^{+}\mathcal{L}[A]$,

што је израз (2.29а).

(ii) Потпуно аналогно (i):

$\dot{\Phi}(A^{+}A) = \mathcal{L}\Phi(A^{+}A) \geq \dot{\Phi}(A^{+})\Phi^{-1}(I)\Phi(A) + \Phi(A^{+})\frac{d\left(\Phi^{-1}(I)\right)}{dt}\dot{\Phi}(A) +$
$\Phi\left(A^{+}\right)\Phi^{-1}(I)\dot{\Phi}(A) = (\mathcal{L}[\Phi(A^{+})])\Phi^{-1}(I)\Phi(A) - \Phi(A^{+})(\mathcal{L}[\Phi^{-1}(I)])\Phi(A) +$
$\Phi(A^{+})\Phi^{-1}(I)(\mathcal{L}[\Phi(A)])$.

Поново узимајући врло мали временски тренутак, $\Phi_{t}^{\pm 1} = e^{\pm \mathcal{L}t} \rightarrow \mathcal{I}$ када $t \rightarrow 0$, следи:

$\mathcal{L}[A^{+}A] \geq \mathcal{L}[A^{+}]\mathrm{A} - A^{+}\mathcal{L}[I]\mathrm{A} + A^{+}\mathcal{L}[\mathrm{A}]$,

што је израз (2.29б).

НАПОМЕНА: Израз (2.29б) се понекад назива[17] „општом релацијом дисипативности“ и важи за ограничене операторе, тј., пре свега, за коначнодимензионалне просторе (чистих стања и одговарајући Банахов простор статистичких оператора, те одговарајућу алгебру оператора).

2.30 Величина дефинисана изразом $p(t) = tr\rho^{2}$ се назива „чистост стања ρ“, у смислу разликовања чистих и мешаних стања (Поглавље 1). Доказати да за динамичка пресликавања која су позитивне полугрупе на коначнодимензионалном простору, услов $\dot{p} \leq 0$ може бити задовољен АККО је процес унитaлан.

Решење: Пресликавање Φ за које важи $\Phi(I) = I$ се назива униталним. То значи да се јединични оператор не мења са временом, па Линдбладов облик мастер једначине за почетно стање $\rho = \frac{1}{d}I$, где је d димезија Хилбертовог простора стања система, даје:

$0 = \dot{I} = \mathcal{L}(I) = -\frac{i}{d}[H, I] + \frac{1}{2d}\sum_{i}([L_{i}, IL_{i}^{+}] + [L_{i}I, L_{i}^{+}]) = \frac{1}{d}\sum_{i}[L_{i}, L_{i}^{+}]$, (2.30а)

---

[17] Видети, нпр., D.A. Lidar et al, Chem. Phys. **322**, 86 (2006).

где су позитивне (временски независне) константе пригушења обухваћене (такође временски независним) Линдбладовим операторима.

Прво изучимо довољност униталности процеса: претпоставимо да је процес унитaлан, тј., да важи (2.30а). Тада општи запис свих процеса локалних у времену, $\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho)$, за које важи $tr\mathcal{L}(\rho) = 0$ за свако ρ, даје:

$$\dot{p} = tr(\rho\dot{\rho} + \dot{\rho}\rho) = 2tr\big(\rho\mathcal{L}(\rho)\big). \qquad (2.30б)$$

Стављањем $\rho = I$, израз (2.30б) непосредно даје $\dot{p} = 0$, чиме је задовољен услов $\dot{p} \leq 0$. То јест, униталност процеса је довољан услов за важење разматране неједнакости.

Испитајмо потребност услова униталности. То јест, претпоставимо важење неједнакости $\dot{p} \leq 0$ за општи процес Марковљевог типа (тј., мастер једначину Линдбладовог облика).

Запишимо (2.30б) у облику који непосредно следи из општег Линдбладовог облика за Марковљеве процесе (где комутаторски део нестаје под операцијом трага):

$$\dot{p} = 2tr\big(\rho\mathcal{L}(\rho)\big) = 2\sum\nolimits_i\big(tr(\rho L_i \rho L_i^+) - tr(\rho^2 L_i^+ L_i)\big) \leq 0. \qquad (2.30в)$$

Како су разматрани процеси потпуно позитивни, имају цео Банахов простор статистичких оператора у свом домену, те морају важити за свако ρ, укључујући и $\rho = (I \pm \varepsilon A)/tr(I \pm \varepsilon A)$, за свако $0 < \varepsilon \ll 1$ и ермитско A чија је норма $\|A\| \leq 1$. Сменом овог у (2.30в) следи:

$$0 \geq 2\sum\nolimits_i\big[tr\big(L_i L_i^+ \pm \varepsilon(L_i A L_i^+ + A L_i L_i^+)\big) - tr(L_i^+ L_i \pm 2\varepsilon A L_i^+ L_i)\big] + O(\varepsilon^2).$$

Коришћењем комутирања под трагом лако се добија:

$$\pm\varepsilon\sum\nolimits_i tr(A[L_i, L_i^+]) \leq 0.$$

Да би овај услов био испуњен за свако A и за оба предзнака, важење неједнакости „≤“ имплицира (тј., захтева ваљаност):

$$\sum\nolimits_i [L_i, L_i^+] = 0\ , \qquad (2.30г)$$

што је заправо услов униталности (2.30а). Дакле, униталност пресликавања ($\Phi(I) = I \Leftrightarrow \mathcal{L}(I) = 0$) је потребан услов за неувећање чистости стања под динамиком која има особину полугрупе за коначнодимензионалне системе.

Укупно, униталност је, и потребан, и довољан услов за неувећање чистости стања за коначнодимензионалне системе (тј., системе са коначнодимензионалним Хилбертовим простором стања).

НАПОМЕНЕ: За случај бесконачнодимензионалних система, видети референцу у фусноти 17. Један пример полугрупе која не задовољава услов $\dot{p} \leq 0, \forall t$, је процес, такозваног, амплитудског распада; видети Задатак 3.4, други део. Коначно стање у асимптотском лимесу за овај процес је чисто стање (основно стање квантног бита, тј., двонивоског атома). Задатак 2.14 би се сада могао формулисати условом $\dot{p} = 0, \forall t$, за почетно чисто стање. У овом смислу, овај задатак је проширење Задатка 2.14. Коначно, сада видимо да услов неувећања чистости стања (ако је оно у неком тренутку мешано) није у несагласности са марковљевошћу. Оперативно, ово значи да се чистост стања у току еволуције не може користити као критеријум марковљевости – један ваљан критеријум марковљевости биће изучен у Задатку 3.42.

2.31 Статистички оператор над Хилбертовим простором чија је димензија N репрезентује се $N \times N$ матрицом чији су елементи представљени са $\rho_{rs}, r, s = 1,2, \dots, N$. Свака таква матрица се може изоморфно репрезентовати матрицом колоном коју чини скуп од N^2 елемената ρ_{rs}. Тада се трансформације статистичких оператора могу репрезентовати $N^2 \times N^2$ матрицом процеса $\mathcal{A}$, чије се дејство на статистичке операторе, уз задржавање двоиндексног записа, може представити у матричном облику:

$$\rho_{rs} \to (\mathcal{A}\rho)_{rs} = A_{rs;r's'}\rho_{r's'} \quad , \quad r, s, r's' = 1,2, \dots, N, \qquad (2.31а)$$

где је матрица $A = \left(A_{rs;r's'}\right)$ репрезентациона матрица процеса (трансформације стања система) и усвојена је Ајнштајнова конвенција о сабирању. Матрици процеса, A, се придружује динамичка матрица означена са B, чији су матрични елементи дефинисани изразом:

$$B_{rr';ss'} = A_{rs;r's'}. \tag{2.31б}$$

Полазећи од општег израза (2.31б), дати оперативне рецепте за добијање динамичке матрице за: (а) један кубит ($N = 2$) и (б) за систем којег чине два кубита ($N = 4$).

Решење: Може се показати да двоиндексно писање у изразу (2.31а) има следеће матрично значење: укупна матрица A се представи као $N \times N$ матрица чији су елементи матрице (тј., подматрице) A_{rs}, од којих је свака $N \times N$ квадратна матрица. Нека први индекс пребројава врсте, а други колоне матрице A. Тада матрични члан $A_{rs;r's'}$ представља члан који се налази у r'-тој врсти и s'-тој колони подматрице A_{rs}. Ово се може лако видети преводом уобичајеног, једноиндексног, записа пресликавања на двоиндексни запис дат изразом (2.31а).

Тада прелаз на динамичку матрицу, дат изразом (2.31б), истиче замену „унутрашњих“ индекса, s и r', уз сачување спољашњих индекса, r и s'. Ово сачување сада истиче да се прелаз (2.31б) одвија у оквиру једне врсте (врсте r) укупне матрице A представљене као $N \times N$ квадратна матрица. И ово важи за сваку такву врсту матрице A, засебно. Са друге стране, сачување индекса s' казује да ће у новој подматрици укупне динамичке матрице B, дати матрични елемент бити у s'-тој колони. То значи да чланови у истој врсти подматрица матрице A сачувавају свој поредак и у новим подматрицама у матрици B. Ефективно, (2.31б) води „савијању“ врста матрице A да би се добиле одговарајуће подматрице матрице B. Ово све ће бити представљено у општем облику за један кубит, као и за један двокубитни систем.

(а) Један кубит. Општи запис стања кубита се може репрезентовати матрицом $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & n_- \\ n_+ & 1-n_z \end{pmatrix}$, која се може изоморфно представити као матрица колона:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z \\ n_- \\ n_+ \\ 1-n_z \end{pmatrix}.$$

За ово стање, узето као почетно, са задатим крајњим стањем процеса (нпр., у неком тренутку) лако се може израчунати репрезентациона матрица процеса, дата у истој репрезентацији у општем облику:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}. \tag{2.31в}$$

Нови матрични запис (2.31в), у складу са горе реченим, гласи:

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.31г}$$

где, на пример, $A_{11} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix}$. Тада, на пример, $A_{11,12} \equiv p_2$. Сходно (2.31б), овде замена индекса не мења ништа, $A_{11;12} \to A_{11;12}$, и зато $B_{11;12} = A_{11;12}$. Међутим, $p_3 \equiv A_{12;11}, p_4 \equiv A_{12;12}$, док $P_1 \equiv A_{11;21}, P_2 \equiv A_{11;22}$, па (2.31б) води замени подврста: $p_3\, p_4 \;\leftrightarrow\; P_1\, P_2$; на пример, $p_3 \equiv A_{12;11} \to B_{11;21} = p_3$, па се у матрици B, уместо P_1 појављује p_3, као и уместо P_2 појављује p_4, и обрнуто. Потпуно аналогно се добија за другу врсту у (2.31г), па (2.31б) даје, укупно:

$$A \to B = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & P_1 & P_2 \\ p_3 & p_4 & P_3 & P_4 \\ q_1 & q_2 & Q_1 & Q_2 \\ q_3 & q_4 & Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}, \tag{2.31д}$$

где су уочљиве подматрице динамичке матрице, B, нпр., $B_{21} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}$.

Све ово се сада може краће записати. Сачување индекса s’ из општег разматрања, где је наглашено да се подврсте међусобно замењују, јасно се види у (2.31ђ), као што је горе илустровано. Зато се (2.31б), овде представљен изразом (2,31д), може краће представити на следећи начин:

уместо подврсте $p_1\,p_2$ се стави α_{11}, уместо подврсте $p_3\,p_4$ се стави α_{12} и тако даље, да се добије нови запис *прве врсте* матрице A:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.31ђ}$$

Сада се прелаз (2.31д) остварује једноставним транспоновањем матрице (2.31ђ). Све се аналогно, и независно од прве, уради и за другу врсту матрице A у репрезентацији (2.31г) и тиме коначно добија (2.31д). Зато се сликовито описује прелаз (2.31д) „савијањем врста“ матрице A да би се добиле подматрице динамичке матрице B, нпр.:

$$(p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4) \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}.$$

(б) Двокубитни систем. Све речено за један кубит важи и за двокубитни систем. Илустрације ради, представимо само прве 4 врсте матрице процеса (која је 16×16 квадратна матрица):

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 & Q_9 & Q_{10} & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Све ниже речено једнако се тиче свих преосталих скупова по 4 врсте (којих има 3, и у сваком скупу по 4 врсте). Сада се може дати репрезентација типа (2.31г):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \tag{2.31е}$$

где, на пример, $A_{12} = \begin{pmatrix} p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ q_5 & q_6 & q_7 & q_8 \\ Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 \end{pmatrix}$. Сходно општем ставу да сачување индекса r, израз (2.31б), истиче да се сви прелази дати овим изразом, обављају у оквиру ове, прве врсте истакнуте изразом (2.31е). Зато све што следи једнако се тиче сваке такве врсте у матрици (2.31е).

Уочимо да сада, нпр., $P_6 \equiv A_{12;22}$, па замена (2.31б) не даје промену, тј., $B_{12;22} = P_6$. Са друге стране, нпр., $q_8 \equiv A_{12;34}$, па (2.31б) даје $B_{13;24} = q_8$, што води међусобној замени q_8 и P_{12} да би се добила динамичка матрица B, јер, $P_{12} \equiv A_{13;24} \rightarrow B_{12;34} = P_{12}$. Тако се укупно добија, за прву врсту истакнуту у (2.31е):

$$B = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} & Q_9 & Q_{10} & Q_{1Q} & Q_{12} \\ p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ & & & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \qquad (2.31ж)$$

Сада постаје очигледно да аналогон (2.31ђ) даје оперативни, кратки запис добијања динамичке матрице. Наиме, уводећи скраћени запис за подврсте, нпр., $p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \equiv \alpha_{11}$, $p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8 \equiv \alpha_{12}$, $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \equiv \alpha_{21}$, итд., нова матрична репрезентација прве врсте матрице процеса:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \qquad (2.31з)$$

води првој врсти динамичке матрице B једноставним транспоновањем матрице (2.31ж), што је оперативни поступак који се примењује на све остале врсте матрице A представљене матрицом (2.31е), да би се добила укупна динамичка матрица B.

Коначно, израз (2.31ж) јасно представља „савијање“ врста матрице A да би се добила матрица B: савијање прве врсте матрице A даје подматрицу B_{11}матрице B, па савијање друге даје B_{12}, треће B_{13} и четврте врсте матрице

A даје четврту подматрицу B_{14} у матрици на крајњој десној страни израза (2.31ж). Све се аналогно обавља за остале, овде непредстављене делове, чиме је задатак завршен.

Општи задаци

3.1 Задати су Краусови оператори за, тзв., „пригушење фазе (*phase damping*)“ пресликавање за један кубит, у матричном облику:

$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$,

где је $\lambda = 1 - cos^2(\omega t)$. За овај процес: (а) Изучавањем динамичке матрице пресликавања доказати да је ово пресликавање потпуно позитивно, (б) израчунати инверзно пресликавање за процес представљен задатим Краусовим операторима, и (в) дати матричну репрезентацију пресликавања за ненулти почетни тренутак.

Решење:

(а) Једно правило за утврђивање потпуне позитивности гласи: ако је динамичка матрица позитивна матрица, тј., са (реалним) ненегативним својственим вредностима, онда пресликавање којег репрезентује јесте потпуно позитивно. Отуда се задатак (а) састоји, прво, у добијању репрезентационе матрице пресликавања, па онда из тога добијање динамичке матрице и, коначно, провере својствених вредности динамичке матрице.

Како је мапа задата Краусовим обликом $\Phi[\rho] = E_0 \rho E_0^{+} + E_1 \rho E_1^{+}$, лако се израчунава коначно стање за произвољно (*за свако*) почетно стање кубита, $\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & n_- \\ n_+ & 1-n_z \end{pmatrix}$, сменом матрица за Краусове операторе и почетно стање у израз за $\Phi[\rho]$. Тако следи коначно стање које, изоморфно пресликано у 4-димензионални простор, добија матричну репрезентацију:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z \\ \sqrt{1-\lambda}n_- \\ \sqrt{1-\lambda}n_+ \\ 1-n_z \end{pmatrix}. \tag{3.1а}$$

Сада репрезентациона матрица („матрица процеса“), A, динамичког пресликавања следи решавањем једначине (у изоморфном, 4-димензионалном простору):

$$\mathrm{A}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{n_z} \\ \mathrm{n_-} \\ \mathrm{n_+} \\ 1-\mathrm{n_z} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z \\ \sqrt{1-\lambda}n_- \\ \sqrt{1-\lambda}n_+ \\ 1-n_z \end{pmatrix} \tag{3.1б}$$

где је са леве стране почетно, а са десне коначно стање кубита.

Опште правило решавања овакве једначине, тј., тражење репрезентационе матрице на овај начин (алтернатива је истакнута у напомени ниже) је да матрица не сме да зависи од чланова који се појављују у матрици која репрезентује стање. Иначе би то значило да пресликавање зависи од почетног стања, што би било нелинеарно пресликавање. Са друге стране, да би пресликавање било ПП, тј., УДП, пресликавање мора бити дефинисано на целом простору; зато се репрезентациона матрица мора тражити за најопштији случај, тј., за свако могуће почетно стање.

Очигледно је да је решење (3.1б):

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1в}$$

чије су својствене вредности $1, \sqrt{1-\lambda}$. Из ње следи динамичка матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\lambda} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1г}$$

чије су својствене вредности, $0,0,1-\sqrt{1-\lambda},1+\sqrt{1-\lambda}$. С обзиром на дефиницију процеса следи $0 \leq \lambda \leq 1$, па су све својствене вредности реалне и ненегативне. То значи да је *динамичка матрица позитивна*, а отуда *следи и да је динамичко пресликавање потпуно позитивно*.

(б) Матрица развијања је дијагонална, са реалним својственим вредностима на дијагонали: $1, \sqrt{1-\lambda}$. С обзиром на дефиницију $\lambda = 1 - cos^2(\omega t)$, за временске тренутке $t = n\pi/2\omega$, за непарно n, друга својствена вредност је једнака нули. То значи да је матрица сингуларна, тј., да није инвертибилна.

Фокусирајмо се на временске тренутке за које су својствене вредности матрице развијања ненулте. Тада из (3.в) непосредно следи:

$$\mathrm{A_{inv}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1д}$$

(в) Ако је пресликавање инвертибилно, онда је и растављиво (наглашено у оквиру Задатка 2.8), тј., важи $\Phi(t,s) = \Phi(t,0)\Phi^{-1}(s,0) \equiv \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$. Тако, разматрајући само тренутке времена за које је матрица развијања несингуларна, $s \neq n\pi/2\omega$, за непарно n, матрична репрезентација динамичког пресликавања за ненулти почетни тренутак гласи:

$$A(t,s) = A(t)A_{inv}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos \omega t}{\cos \omega s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos \omega t}{\cos \omega s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s \neq \frac{n\pi}{2\omega}, n = (2k+1), k\epsilon\mathbb{R}. \tag{3.1ђ}$$

Тако закључујемо: са ограничењем за временски интервал $[0,t]$, $0 \leq s \leq t < \pi/2\omega$, разматрани динамички процес је потпуно позитиван, инвертибилан те стога растављив, са матричном репрезентацијом (3.1ђ) за ненулти почетни тренутак.

НАПОМЕНА: 1. Поступак репрезентовања динамичког пресликавања се може обавити и увођењем скаларног производа за статистичке операторе, што није унапред дато јер статистички оператори чине Банахов простор на коме није дефинисан скаларни производ. Овде нема разлога за такав поступак, јер је деловање пресликавања познато за сваки статистички оператор (почетно стање кубита) и не мора се обавити транспоновање добијене матрице, јер се оно тиче матрице развоја по ОНБ векторског простора; 2. Поступак коришћен под (а) даје поуздане резултате само за квантне системе са *коначнодимензионалним* простором стања.

3.2 Доказати да Краусови оператори у претходном задатку и Краусови оператори:

$$E'_0 = \sqrt{\alpha}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, E'_1 = \sqrt{1-\alpha}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

дају различите Краусове облике за исту динамику једног кубита, уз дефиницију: $\alpha = \left(1+\sqrt{1-\lambda}\right)/2$.

Решење: Користећи ознаке из претходног задатка, требало би проверити да ли важи једнакост:

$$E_0\rho E_0 + E_1\rho E_1 = E'_0\rho E'_0 + E'_1\rho E'_1 \qquad (3.2а)$$

за *свако* почетно стање кубита, ρ.

Имајући у виду да је најопштији запис стања једног кубита (или спина-1/2) у стандардној Z-репрезентацији:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+n_z & n_-\\ n_+ & 1-n_z\end{pmatrix}, \qquad (3.2б)$$

$n_- = n_x - in_y = n_+^*$, лако је спровести матрични рачун да се добије:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+n_z) & \frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda}n_-\\ \frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda}n_+ & \frac{1}{2}(1-n_z)\end{pmatrix} \qquad (3.2в)$$

и за леву, и за десну страну горње једнакости. То јест, две групе Краусових оператора дају различита Краусова разлагања за једно те исто динамичко пресликавање - једнозначно стање у сваком тренутку времена.

3.3 Дати потврду резултата горњег задатка успостављањем унитарне везе двеју група Краусових оператора задатих у претходна два задатка.

Решење: Унитарно разлагање значи да се један скуп оператора може представити као линеарна комбинација других, при чему константе те линеарне комбинације чине унитарну матрицу – позната „унитарна слобода“, тј., нееднозначност Краусове форме:

$$E_0 = u_{00}E'_0 + u_{01}E'_1$$

$$E_1 = u_{10}E'_0 + u_{11}E'_1 \tag{3.3а}$$

Резултат претходног задатка биће потврђен ако је матрица $\begin{pmatrix} u_{00} & u_{10} \\ u_{01} & u_{11} \end{pmatrix}$ унитарна.

Користећи дефиниције Краусових оператора из претходна два задатка, прва горња једнакост даје систем једначина:

$$1 = u_{00}\sqrt{\alpha} + u_{01}\sqrt{1-\alpha}$$

$$\sqrt{1-\lambda} = u_{00}\sqrt{\alpha} - u_{01}\sqrt{1-\alpha} \tag{3.3б}$$

док друга једнакост даје систем једначина:

$$0 = u_{10}\sqrt{\alpha} + u_{11}\sqrt{1-\alpha}$$

$$\sqrt{\lambda} = u_{10}\sqrt{\alpha} - u_{11}\sqrt{1-\alpha} \tag{3.3в}$$

Решења ових система једначина гласе:

$$u_{00} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}}}{\sqrt{2}}, u_{01} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\lambda}}}{\sqrt{2}}$$

$$u_{10} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}}}, u_{11} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2-2\sqrt{1-\lambda}}} \tag{3.3г}$$

па тражена матрица добија облик:

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{2}} & \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2+2\sqrt{1-\lambda}}} \\ \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{2}} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2-2\sqrt{1-\lambda}}} \end{pmatrix} \tag{3.3д}$$

Лако је показати да колоне (као и врсте) матрице u чине ОНБ, што је особина унитарних матрица, тј., да важи $uu^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u^T u$.

3.4 Показати да се динамичка пресликавања за ненулти почетни тренутак не могу, у општем случају, матрично представити непосредном сменом коначног тренутка, t, разликом $t-s$, било у Краусов облик, било у матрични израз за динамичку мапу са почетним нултим тренутком.

Решење: Задатак је проверити да ли се може матрично писати:

$$A(t,s) = A(t-s). \tag{3.4а}$$

За унитарну еволуцију ово је очигледно тачно:

$$U(t-s) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-s)} \xleftarrow{t\to t-s} U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}, \tag{3.4б}$$

за изоловани систем, али за отворене системе ово не важи увек. Размотримо два, међусобно супротна, примера.

Прво процес разматран у Задатку 3.1. Тамо је пресликавање представљено матрицом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.4в}$$

док је $\mathcal{G}_{t-s}$ представљено матрицом (уз ограничење временског интервала, в. Задатак 3.1):

$$\mathrm{A}(\mathrm{t},\mathrm{s}) = \mathrm{A}(\mathrm{t})\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos\omega\mathrm{t}}{\cos\omega\mathrm{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos\omega\mathrm{t}}{\cos\omega\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.4г)$$

Користећи $\lambda(t) = 1 - cos^2(\omega t)$, тј., $\lambda(t-s) = 1 - cos^2\big(\omega(t-s)\big)$, (3.4в) даје:

$$A'(t-s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda(t-s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega(t-s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega(t-s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.4д)$$

док расписано (3.4г):

$$\mathrm{A}(\mathrm{t},\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1-\lambda(t)}(1-\lambda(s))^{3/2}}{1-2\lambda(s)+\lambda^2(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-\lambda(t)}(1-\lambda(s))^{3/2}}{1-2\lambda(s)+\lambda^2(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.4ђ)$$

очигледно важи неједнакост:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega(t-s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega(t-s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.4е)$$

што је потврда става задатка.

Размотримо други пример процеса (динамичког пресликавања) задатог следећим Краусовим операторима (тзв., пригушење амплитуде – *amplitude damping* [3]):

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1 - e^{-2\gamma t}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4ж}$$

овде је $\gamma = const. > 0$, тј., фактор пригушења не зависи од времена, у репрезентацији у којој је Паулијев Z оператор репрезентован матрицом $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. У истој репрезентацији, произвољно стање је репрезентовано матрицом: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - n_z & n_+ \\ n_- & 1 + n_z \end{pmatrix}$.

Као и у Задатку 3.1, препишимо деловање Краусових оператора на произвољно стање у четвородимензионалну репрезентацију да добијемо матрицу развијања:

$$\Phi\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{n_z} \\ \mathrm{n_+} \\ \mathrm{n_-} \\ 1 + \mathrm{n_z} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1 - n_z) + (1 - e^{-2\gamma t})(1 + n_z) \\ e^{-\gamma t} n_+ \\ e^{-\gamma t} n_- \\ e^{-2\gamma t}(1 + n_z) \end{pmatrix}, \tag{3.4з}$$

одакле је јасно да репрезентациона матрица има облик:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - e^{-2t\gamma} \\ 0 & e^{-t\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t\gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.4и}$$

док динамичка матрица има облик:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-t\gamma} \\ 0 & 1 - e^{-2t\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t\gamma} & 0 & 0 & e^{-2t\gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.4ј}$$

са ненегативним својственим вредностима: $0{,}1 - e^{-2t\gamma}, 1 + e^{-2t\gamma}$. Ово је доказ да је пресликавање потпуно позитивно.

Својствене вредности матрице развијања су све ненулте и позитивне (осим у асимптотском лимесу $t \to \infty$): $1, e^{-t\gamma}, e^{-2t\gamma}$. Зато постоји инверзна матрица која гласи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-e^{2t\gamma} \\ 0 & e^{t\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t\gamma} \end{pmatrix}. \tag{3.4л}$$

Сада пресликавање за ненулти почетни тренутак има облик:

$$\Phi_{t,s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-e^{-2t\gamma} \\ 0 & e^{-t\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-e^{2s\gamma} \\ 0 & e^{s\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{s\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2s\gamma} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-e^{-2(t-s)\gamma} \\ 0 & e^{-(t-s)\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-s)\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2(t-s)\gamma} \end{pmatrix} = \Phi_{t-s}, \tag{3.4м}$$

то јест, за овај процес важи једнакост $A(t,s) = A(t-s)$.. Проверу са Краусовим операторима остављамо за самосталну вежбу (в. напомену испод).

НАПОМЕНА: Растављивост пресликавања у Краусовом облику динамичког пресликавања гласи: $\sum_k K_k(t,s)\,\rho_S(s)K_k^+(t,s)$, што подразумева задато стање са експлицитном зависношћу од почетног тренутка s; још мало расписано: $\sum_k K_k(t,s)\sum_{k'} K_{k'}(s,0)\,\rho_S(0)K_{k'}^+(s,0)K_k^+(t,s)$, уз стање задато у тренутку 0. Сада је задатак утрдити да ли су Краусови оператори $K_k(t,s) = K_k(t-s), \forall k$.

3.5 Поновити Задатак 3.4 за уопштено пригушење амплитуде (*generalized amplitude damping* [3]), што је дефинисано скупом Краусових оператора:

$$E_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix},$$

са вероватноћом p и $0 \leq \gamma = 1 - e^{-t/T} \leq 1$.

Решење: Аналогно Задатку 3.1, матрична једначина у 4-димензионалном простору гласи (у стандардној репрезентацији: $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$):

$$\Phi\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{n_z} \\ \mathrm{n_-} \\ \mathrm{n_+} \\ 1-\mathrm{n_z} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1+2p)\gamma-(-1+\gamma)n_z \\ \sqrt{1-\gamma}n_- \\ \sqrt{1-\gamma}n_+ \\ 1+\gamma-2p\gamma+(-1+\gamma)n_z \end{pmatrix}. \qquad (3.5а)$$

Због разлике у репрезентацији, Краусове матрице уопштеног пригушења амплитуде се своде на Краусове матрице пригушења амплитуде, тј., задатка 3.4(б), за $p = 0$; наравно, избор исте репрезентације би подразумевао избор $p = 1$.

Сасвим је очигледно да је репрезентациона матрица облика:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \qquad (3.5б)$$

Множењем ове матрице са матрицом колоном која представља почетно стање даје систем једначина:

$$a(1+n_z)+b(1-n_z) = 1+(-1+2p)\gamma-(-1+\gamma)n_z,$$

$$c(1+n_z)+d(1-n_z) = 1+\gamma-2p\gamma+(-1+\gamma)n_z. \qquad (3.5в)$$

Изједначавањем слободних чланова и чланова уз n_z следе два пара једначина:

$$a+b = 1-\gamma+2p\gamma$$

$$a-b = 1-\gamma \qquad (3.5г)$$

и

$$c+d = 1+\gamma-2p\gamma$$

$$c-d = \gamma-1. \qquad (3.5д)$$

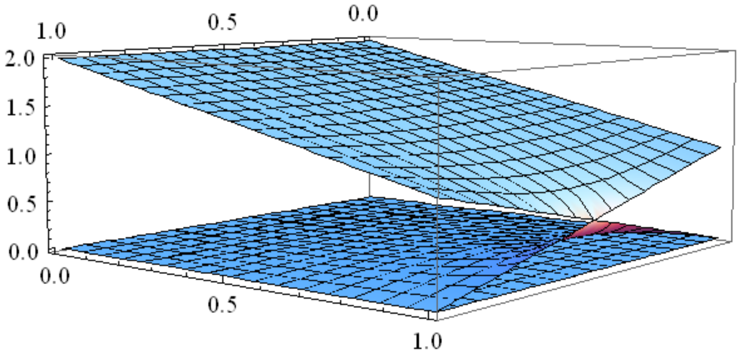
Решавањем једначина по константама a,b,c,d следи репрезентациона матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1-(1-p)\gamma & 0 & 0 & p\gamma \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ (1-p)\gamma & 0 & 0 & 1-p\gamma \end{pmatrix}, \qquad (3.5ђ)$$

а из ње динамичка матрица:

$$\begin{pmatrix} 1-(1-p)\gamma & 0 & 0 & \sqrt{1-\gamma} \\ 0 & p\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)\gamma & 0 \\ \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 & 1-p\gamma \end{pmatrix}. \qquad (3.5е)$$

Својствене вредности динамичке матрице, $(1-p)\gamma, p\gamma, \frac{1}{2}(2-\gamma-\sqrt{4-4\gamma+\gamma^2-4p\gamma^2+4p^2\gamma^2}), \frac{1}{2}(2-\gamma+\sqrt{4-4\gamma+\gamma^2-4p\gamma^2+4p^2\gamma^2})$, су представљене на Сликци 3.1:



Слика 3.1. Својствене вредности динамичке матрице (3.5е) као функције γ и p, $p, \gamma \in [0,1]$.

где се види да су све својствене вредности ненегативне, за свако $p, \gamma \in [0,1]$. То је, наравно, доказ потпуне позитивности динамике.

Својствене вредности репрезентационе матрице, A (израз (3.5ђ)), су: $1, \sqrt{1-\gamma}, \sqrt{1-\gamma}, 1-\gamma$. Све својствене вредности су очигледно позитивне, те отуда постоји инвезна матрица, $\mathrm{A}_{\mathrm{inv}}$.

Лако се добија инверзна матрица:

$$\mathrm{A_{inv}} = \begin{pmatrix} \frac{1-\gamma-p\gamma+p\gamma^2}{1-2\gamma+\gamma^2} & 0 & 0 & \frac{-p\gamma+p\gamma^2}{1-2\gamma+\gamma^2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma)^{\frac{3}{2}}}{1-2\gamma+\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\gamma)^{\frac{3}{2}}}{1-2\gamma+\gamma^2} & 0 \\ \frac{-\gamma+p\gamma+\gamma^2-p\gamma^2}{1-2\gamma+\gamma^2} & 0 & 0 & \frac{1-2\gamma+p\gamma+\gamma^2-p\gamma^2}{1-2\gamma+\gamma^2} \end{pmatrix}. \tag{3.5ж}$$

Отуда:

$$\mathrm{A(t,s) = A(t)A_{inv}(s)} =$$

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{s-t}{T}}(-1+p)+p & 0 & 0 & p-e^{\frac{s-t}{T}}p \\ 0 & e^{\frac{s}{T}}\sqrt{e^{-\frac{s}{T}}}\sqrt{e^{-\frac{t}{T}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{s}{T}}\sqrt{e^{-\frac{s}{T}}}\sqrt{e^{-\frac{t}{T}}} & 0 \\ 1+e^{\frac{s-t}{T}}(-1+p)-p & 0 & 0 & 1+\left(-1+e^{\frac{s-t}{T}}\right)p \end{pmatrix} \tag{3.5з}$$

Проста смена $t-s$ у репрезентациону матрицу (3.5ђ) даје:

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{s-t}{T}}(-1+p)+p & 0 & 0 & p\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right) \\ 0 & \sqrt{e^{\frac{s-t}{T}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{e^{\frac{s-t}{T}}} & 0 \\ \left(1-e^{\frac{s-t}{T}}\right)(1-p) & 0 & 0 & 1+\left(-1+e^{\frac{s-t}{T}}\right)p \end{pmatrix} \tag{3.5и}$$

што очигледно даје исти израз као у (3.5з). Дакле, уопштено пригушење амплитуде је динамика за коју се може једноставно смењивати тренутак t разликом тренутака $t-s$.

3.6 Задато је динамичко пресликавање, тзв., уопштена деполаризација (енг.: *generalized depolarizing*), следећим скупом Краусових оператора у интеракционој слици:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} i\sqrt{1-e^{-4\gamma t}} \\ \frac{1}{2} i\sqrt{1-e^{-4\gamma t}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-4\gamma t}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-4\gamma t}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{1-2e^{-4\gamma t/\Omega}+e^{-4\gamma t}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{1-2e^{-4\gamma t/\Omega}+e^{-4\gamma t}} \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{1+2e^{-4\gamma t/\Omega}+e^{-4\gamma t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1+2e^{-4\gamma t/\Omega}+e^{-4\gamma t}} \end{pmatrix}.$$

за $\Omega \in (-2,0)$. Све урадити као и у претходном задатку.

Решење: Репрезентациона матрица следи као решење једнакости:

$$A\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z \\ n_- \\ n_+ \\ 1-n_z \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-4t\gamma}n_z \\ e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}}n_- \\ e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}}n_+ \\ 1-e^{-4t\gamma}n_z \end{pmatrix}. \tag{3.6а}$$

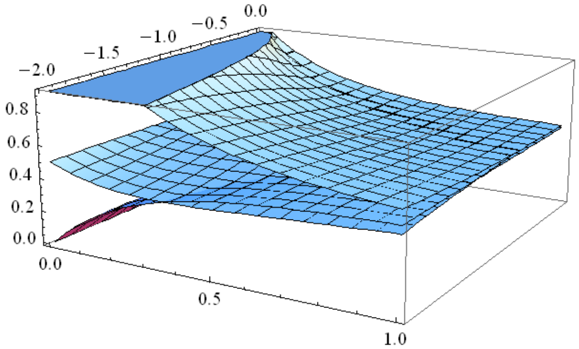
Поступак представљен у претходним задацима лако даје за репрезентациону матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{-4t\gamma}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-4t\gamma}) \\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-e^{-4t\gamma}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+e^{-4t\gamma}) \end{pmatrix} \tag{3.6б}$$

одакле следи динамичка матрица:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{-4t\gamma}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}} \\ 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-4t\gamma}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-4t\gamma}) & 0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+e^{-4t\gamma}) \end{pmatrix}, \qquad \text{(3.6в)}$$

чије су својствене вредности: $\{\frac{1}{2}(1-e^{-4t\gamma}), \frac{1}{2}(1-e^{-4t\gamma}), \frac{1}{2}(1+e^{-4t\gamma}-e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}}), \frac{1}{2}(1+e^{-4t\gamma}+e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}})\}$, и доњи график потврђује позитивност свих својствених вредности за све вредности параметара; без губљења општости, на слици је одабрано $\gamma = 1$.



Слика 3.2. Својствене вредности динамичке матрице (3.6в) за избор $\gamma = 1$, у функцији времена $t \in [0,1]$ и параметра $\Omega \in [-2,0]$.

Тиме је доказана потпуна позитивност динамике.

Матрица инверзна матрици развијања гласи:

$$A_{inv}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{4t\gamma}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-e^{4t\gamma}) \\ 0 & 2e^{-\frac{4t\gamma}{\Omega}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-\frac{4t\gamma}{\Omega}} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-e^{4t\gamma}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+e^{4t\gamma}) \end{pmatrix}, \qquad \text{(3.6г)}$$

што за ненулти почетни тренутак s даје:

$$\mathrm{A(t,s)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+e^{4(s-t)\gamma}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1-e^{4(s-t)\gamma}\right) \\ 0 & e^{\frac{4(-s+t)\gamma}{\Omega}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4(-s+t)\gamma}{\Omega}} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{4(s-t)\gamma}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+e^{4(s-t)\gamma}\right) \end{pmatrix}, \qquad (3.6д)$$

што се непосредно добија и сменом $t - s$ у израз (3.6б).

3.7 Доказати потпуну позитивност процеса из Задатака 3.1, 3.4 и 3.5, коришћењем изоморфизма Чоија-Јамиолковског.

Решење: У Задатку 2.5 дат је услов потпуне позитивности пресликавања Ф:

$$\sum_{m,n,m',n'} c^*_{mn}\, c_{m'n'} \langle n|\Phi[|\mathrm{m}\rangle\langle \mathrm{m}'|]|n'\rangle \geq 0, \qquad (3.7а)$$

за сваки скуп константи нормирања, c_{mn}, и сваки базис у простору кубита; $\sum_{m,n}|c_{mn}|^2 = 1$.

За процес дефинисан у Задатку 3.1, $\Phi[|\mathrm{m}\rangle\langle \mathrm{m}'|] = E_0|\mathrm{m}\rangle\langle \mathrm{m}'|E_0 + E_1|\mathrm{m}\rangle\langle \mathrm{m}'|E_1$.

Одаберимо апсолутни базис за један кубит: $|1\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |0\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Дејство пресликавања на дијаде даје матрице:

$$\Phi[|1\rangle\langle 1|] = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \Phi[|0\rangle\langle 0|] = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \Phi[|1\rangle\langle 0|] = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{1-\lambda}\\0 & 0\end{pmatrix} = (\Phi[|1\rangle\langle 0|])^+. \qquad (3.7б)$$

Из (3.7б) јасно је да ће ненулти сабирци у (3.7а) бити: $\langle 1|\Phi[|1\rangle\langle 1|]|1\rangle = 1 = \langle 0|\Phi[|0\rangle\langle 0|]|0\rangle$, $\langle 1|\Phi[|1\rangle\langle 0|]|0\rangle = \langle 0|\Phi[|0\rangle\langle 1|]|1\rangle = \sqrt{1-\lambda}$. Из (3.7а) се види да овим члановима одговарају константе: $|c_{11}|^2$, $|c_{00}|^2$, $c^*_{11}c_{00}$, $c^*_{00}c_{11}$, истим редом. Отуд следи лева страна (3.7а):

$$|c_{11}|^2 + |c_{00}|^2 + 2\mathrm{Re}(c^*_{11}c_{00})\sqrt{1-\lambda}. \qquad (3.7в)$$

Искористимо поларну форму константи, и одаберимо једну негативну вредност: $c_{11} = r_1 e^{i\delta_1}, c_{00} = -r_0 e^{i\delta_0}, r_i \geq 0, \forall i = 0{,}1$. Тада (3.7в) добија облик:

$$r_1^2 + r_0^2 - 2r_1 r_0 \sqrt{1-\lambda}\cos(\delta_0 - \delta_1) \geq (r_1 - r_0)^2 \geq 0,$$

што је и требало показати.

Истим начином се добијају потврде потпуне позитивности осталих процеса, што се оставља читаоцу за самосталну вежбу.

3.8 Доказати стационарност:

(а) стања задатог Блоховим вектором $\vec{n} = \{0{,}0,-1\}$ за процес пригушења амплитуде (Задатак 3.4) и

(б) стања задатог Блоховим вектором $\vec{n} = \{0, 0, 2p-1\}$, за процес уопштеног пригушења амплитуде (Задатак 3.5).

Решење: Стационарност стања за дато пресликавање, по дефиницији, значи да то пресликавање не мења то стање: $\Phi[\rho] = \rho$. У формализму Краусовог записа, то значи да за стационарно стање важи: $\sum_i E_i \rho E_i^+ = \rho$.

(а) Користећи Краусове операторе из Задатка 3.4, требало би проверити важење једнакости:

$$E_1 \rho E_1^+ + E_2 \rho E_2^+ = \rho, \qquad (3.8а)$$

где се одабрани Блохов вектор тиче основног стања за одабрану репрезентацију $Z \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, те је основно стање репрезентовано матрицом $\rho = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Сада матрични запис једнакости (3.8а) гласи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-e^{-2\gamma t}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-e^{-2\gamma t}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.8б)$$

Чиме је потврђено (3.8а).

(б) Користећи Краусове операторе из Задатка 3.5, требало би проверити да ли важи:

$$\rho = E_1\rho E_1^+ + E_2\rho E_2^+ + E_3\rho E_3^+ + E_4\rho E_4^+ = \rho, \tag{3.8в}$$

где је матрична репрезентација стационарног стања (у стандардној репрезентацији, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$): $\rho_{ss} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}$.

Матрични запис (3.8в) је облика:

$$\begin{gathered}\sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix} + \\ \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix} + \\ \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\sqrt{1-p}\begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{3.8г}$$

Кораци рачуна који воде до коначне једнакости у (3.8г) се лако обављају. Стационарних стања има непребројиво много: $p \in [0,1]$. За $p = 0$, стационарно је основно стање, док за $p = 1$ стационарно стање је побуђено стање.

НАПОМЕНЕ: 1. У формализму мастер једначина, стационарност стања значи да лиувилијан даје нулу деловањем на то стање: $\mathcal{L}[\rho] = 0$; 2. Провера стационарности се не може обавити коришћењем динамичке матрице; ако матрица даје нулу делујући на неко ненулто стање, то је само доказ да је та матрица сингуларна.

3.9 Потврдити резултат претходног задатка за процес пригушења амплитуде у формализму мастер једначина.

Решење: Мастер једначина (у интеракционој слици, са занемаривањем Лембовог померајa) која одговара процесу пригушења амплитуде је облика:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}[\rho] = \gamma[2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-], \tag{3.9а}$$

где је $\sigma_- = |0\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(X - iY) = \sigma_+^+$, ако је стационарно стање које треба проверити основно стање, $|0\rangle\langle 0|$.

Сада је задатак (видети Напомену 1 у претходном задатку) показати да важи $\mathcal{L}[\rho] = 0$ за стање $|0\rangle\langle 0|$. Непосредном сменом у дисипатор (д.с. горње мастер једначине) добија се:

$$2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_- = 2(|0\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0|)(|1\rangle\langle 0|) - (|1\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0|) - (|0\rangle\langle 0|)(|1\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 1|) \equiv 0, \tag{3.9б}$$

што је и требало показати.

НАПОМЕНА: Уочено стационарно стање је истовремено и динамичко асимптотско стање, истакнуто испод Дефиниције 21 у теоријском уводу. За доказ овога видети Задатак 3.17. Израз (3.9а) одговара, нпр., двонивоском атому у контакту са окружењем на апсолутној нули.

3.10 Доказати да је атом отворен квантни систем.

Решење: Размотримо како би временски непрекидна и глатка унитарна динамика могла да преведе неко почетно својствено стање енергије (унутрашње енергије) атома, $|\varphi_m\rangle$, у неко друго својствено стање, $|\varphi_n\rangle$. Ако је почетно стање $|\psi\rangle = |\varphi_m\rangle$, тада унитарна динамика води једнозначном каснијем стању у сваком тренутку: $|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)|\varphi_m\rangle$. Како је почетно стање својствено за хамилтонијан атома следи $|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)|\varphi_m\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}|\varphi_m\rangle \equiv |\varphi_m\rangle = |\psi\rangle$, при чему је коришћен први постулат, тј., постулат о стањима, квантне механике. То јест, атом у својственом стању енергије остаје заувек у том истом стању – „стационарна“ стања атома се (сходно првом постулату квантне механике о стањима) не мењају са временом. То значи да би мерење енергије атома у стационарно стању $|\varphi_m\rangle$ дало вероватноћу добијања енергије E_m, сходно постулату о вероватноћама („Борновом правилу“): $W\left(\widehat{H}, |\varphi_m\rangle, E_m\right) = |\langle\varphi_m|\psi(t)\rangle|^2 = 1$, у сваком тренутку t. Наравно, ово је у потпуној супротности са феноменологијом атомских прелаза, тј., са феноменолошким моделом атомских прелаза: побуђена стања атома прелазе у неко од енергијски нижих стања са одређеном вероватноћом прелаза. Како атоми не могу бити описани унитарном динамиком, тј., *феноменолошки* нису затворени, по дефиницији представљају отворене квантне системе.

НАПОМЕНА: Наравно, унитарни (детерминистички, временски непрекидан) прелаз било којих стања атома која нису својствена стања (унутрашње) енергије атома једних у друге су могућа, па чак и између међусобно ортогоналних стања. Чињеница да је атом (да су сви атоми, и сви молекули...) отворени систем чија динамика (овде, прецизно, унутрашњих степена слободе) се не може описати Шредингеровим унитарним законом, је историјски славни „проблем нестабилности 'стационарних' стања атома" [7] који се испољава као *феноменолошка* чињеница (де)екситације атома. Фундаментално окружење атома као отворених система чине, тзв., *квантне флуктуације вакуума* [4][18], што је детаљније разматрано у Задацима 4.7-4.10.

3.11 Изградити један лиувилијан за атомске прелазе само помоћу феноменолошких резултата.

Решење: Закон одржања енергије у атомским прелазима успоставља: ако је прелаз са енергијског нивоа E_m атома био на енергијски ниво E_n, тј., енергија атома се променила за $\Delta E = E_n - E_m$, онда се енергија ЕМ поља *око атома* променила за $-\Delta E$, а која се тиче (упијеног, или израченог) фотона енергије $\omega = -\Delta E/h$. Дакле, за сваки једнофотонски прелаз, ако оператор σ_+ одговара увећању енергије атома (упијању фотона), тада је нужно да ЕМ поље изгуби један фотон те енергије (тј. фреквенције), тј., нужна је анихилација таквог једног фотона ЕМ поља, описана оператором анихилације једног фотона дате фреквенције, a. Отуда се мора појавити купловање типа, $\sigma_+ \otimes a$, у интеракционом хамилтонијану за изоловани систем „атом*ЕМ поље". Како ово није ермитско, те не може бити модел интеракционог хамилтонијана, нужно је проширење разматраног купловања:

$$g\sigma_+ \otimes a + g^*\sigma_- \otimes a^+, \qquad (3.11a)$$

---

[18] M. O. Scully and M. Suhail Zubairy, Quantum Optics, Cambridge Univ. Press, 2001, друго издање; J. Jeknić-Dugić et al, Open Access Libr. **1**, e501 (2014).

где су сабирци „ермитски конјуговани“ (енгл.: *h.c.*) један у односу на други, тј., међусобно адјунговани оператори. Одатле следи да оператор σ_- одговара израчивању једног фотона од стране атома, све за дату фреквенцију (тј. „мод“).

Ако се посматра само пар стања атома, онда су $\sigma_\pm$ оператори добро познати оператори снижења/увећања из теорије спина ½ (што је модел квантног бита, тј., кубита) и тада је од интереса само једна фреквенција прелаза (један мод), $\omega = (E_1 - E_0)/h$. Отуда је јасно да ће Линдбладови оператори бити линеарна (можда и временски зависна) комбинација ових оператора. Потражимо *најједноставнију могућност*: да су Линдбладови оператори баш ови оператори, $\sigma_\pm$, тј., да имамо два Линдбладова оператора: σ_+ и $\sigma_- = \sigma_+^+$. Тада, сходно општем облику лиувилијана (у интеракционој слици се своди на дисипатор) за *Марковљеве процесе, морамо* писати:

$$\gamma_1\left(\sigma_-\,\rho(\mathrm{t})\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\,\sigma_-\,,\rho(\mathrm{t})\}\right) + \gamma_2\left(\sigma_+\,\rho(\mathrm{t})\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\,\sigma_+\,,\rho(\mathrm{t})\}\right). \quad (3.11б)$$

Да бисмо добили било какву информацију о факторима пригушења (овде узетим као временски независне константе), погледајмо шта који члан у лиувилијану даје за стања $|0\rangle$-основно стање, и $|1\rangle$-побуђено стање, који задовољавају: $\mathrm{Z}|1\rangle = |1\rangle, \mathrm{Z}|0\rangle = -|0\rangle$, а у репрезентацији „у овом базису“, сигма оператори постају Паулијеве сигма матрице. По дефиницији датој у Задатку 3.9, $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0| = \sigma_-^+$. Отуда, нпр., $\sigma_+\,|0\rangle\langle 0|\sigma_- = |1\rangle\langle 1|$, па други члан у дисипатору одговара побуђивању атома, а први члан, у којем је $\sigma_-\,|1\rangle\langle 1|\sigma_+ = |0\rangle\langle 0|$, израчивању од стране атома. Више информација о факторима пригушења захтева више података, као, нпр., стање окружења (нпр., топлотно равнотежно стање и температура окружења), те овде неће даље бити разрађивано. У литератури се може наћи [2,4]: за топлотно уравнотежено окружење („топлотно купатило“, „резервоар“) на температури T,

$$\gamma_1 \propto 1 + n(\omega), \gamma_2 \propto n(\omega), \quad (3.11в)$$

где је $n(\omega)$ средњи број фотона једног мода ЕМ поља фреквенције ω, на температури T:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{{h\omega}/{k_B T}} - 1}. \tag{3.11г}$$

НАПОМЕНА: Уочити да је за $T \to 0$, $n(\omega) \to 0$, па се горњи лиувилијан своди само на процесе израчивања ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 \propto 1$) од стране атома (деекситацију атома), јер у простору нема реалних фотона ($n(\omega) = 0$) који би побудили (екситовали) атом.

3.12 Као у претходном задатку, али са урачунавањем узмака центра маса атома услед упијања/израчивања фотона.

Решење: У напомени уз Задатак 1.12 истакнуто је да квантна теорија атома разматра атом као сачињен из два „подсистема“ – центра маса (CM) и унутрашњих степена слободе (R) за које Шредингерова једначина, због одсуства интеракције између CM и R, даје две независне унитарне еволуције. У Задатку 3.10 смо схватили да је атом отворени систем, јер унитарна динамика не може да опише „квантне скокове“, тј., промене енергије при, феноменолошки уоченом, прелазу са једног на други енергијски ниво система R. То је у Задатку 3.11 феноменолошки моделовано, занемарујући центар маса атома. Али, закон одржања импулса намеће једнакости:

$$\vec{p} + h\vec{k} = \vec{p}', \qquad \vec{p} = \vec{p}' + h\vec{k} \tag{3.12а}$$

где је са „прим“ означен коначни импулс центра маса атома, па изрази одговарају упијању и израчивању фотона, редом. У квантном запису то одговара промени стања: $|\vec{p}\rangle \to \left|\vec{p} + h\vec{k}\right\rangle$ (упијање фотона праћено побуђењем атома, оператор $\hat{\sigma}_+$) и $|\vec{p}\rangle \to \left|\vec{p} - h\vec{k}\right\rangle$ (израчивање које одговара деекситацији атома, оператор $\hat{\sigma}_-$). Како је познато, $e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}|\vec{p}\rangle = \left|\vec{p} - h\vec{k}\right\rangle$, те оператор $e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}$ одговара израчивању фотона, тј., операцији $\hat{\sigma}_-$ на унутрашњим степенима слободе атома. Обрнуто, $e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}$ одговара упијању фотона, тј., атомском оператору $\hat{\sigma}_+$. Како се „израчивање“ фотона описује (овде: једномодним) Босе оператором креације, $\hat{b}^+$, и обрнуто за упијање фотона, оператором анихилације, $\hat{b}$, то стоји једнакост:

$$\left(e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \otimes \hat{\sigma}_+ \otimes \hat{b}\right)\left(|\vec{p}\rangle_{CM} \otimes |0\rangle_R \otimes |1\rangle_{EM}\right) = \left|\vec{p} + h\vec{k}\right\rangle_{CM} \otimes |1\rangle_R \otimes |0\rangle_{EM}$$

(3.12б)

што физички одговара побуђењу атома и нестанку фотона (једног мода описаног таласним вектором $\vec{k}$), уз промену импулса центра маса у складу са (3.12а).

Тако се сада појављује идеја *феноменолошког* моделовања ове физичке ситуације: заменимо Линдбладове операторе, $\hat{\sigma}_+$ и $\hat{\sigma}_-$ у (3.11б), новим операторима, $\hat{A}_1 = e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \otimes \hat{\sigma}_+, \hat{A}_2 = e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \otimes \hat{\sigma}_-$– електромагнетно поље (тј., фотон) и даље сматрајући окружењем атома.

Наравно, обеју врста нових оператора има онолико колико и вектора $\vec{k}$. Зато сабирање Линдбладових оператора овде изискује интеграцију по свим векторима $\vec{k}$. При томе, како је $\left|\vec{k}\right| = \omega/c$ једнозначно одређено, згодно је увести сферне координате, тј., преостали просторни угао $\vec{\Omega}$ за импулс фотона. Тако се тродимензионална интеграција у овом простору своди на дводимензионалну, па сменом свега већ реченог у мастер једначину Задатка 3.11, добија се (у поједностављеним ознакама):

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \int \mathrm{d}^2\vec{\Omega}\left(A_i\, \rho(\mathrm{t}) A_i^+ - \frac{1}{2}\{A_i^+\, A_i\,, \rho(\mathrm{t})\}\right), \qquad (3.12в)$$

што се сада тиче целог атома, не само унутрашњих степена слободе R. Расписано, мастер једначина је облика (уз испуштање ознаке за тензорски производ):

$$\frac{d\rho(\mathrm{t})}{dt} = \gamma_1 \int \mathrm{d}^2\vec{\Omega}\left(e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_-\, \rho(\mathrm{t}) e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+ - \frac{1}{2}\left\{e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+\, e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_-\,, \rho(\mathrm{t})\right\}\right) +$$
$$\gamma_2 \int \mathrm{d}^2\vec{\Omega}\left(e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+\, \rho(\mathrm{t}) e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_- - \frac{1}{2}\left\{e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_-\, e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+\,, \rho(\mathrm{t})\right\}\right) =$$
$$\gamma_1 \int \mathrm{d}^2\vec{\Omega}\left(e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_-\, \rho(\mathrm{t}) e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+ - \frac{1}{2}\left\{e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \otimes \sigma_+\, \sigma_-\,, \rho(\mathrm{t})\right\}\right) +$$
$$\gamma_2 \int \mathrm{d}^2\vec{\Omega}\left(e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+\, \rho(\mathrm{t}) e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_- - \frac{1}{2}\left\{e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} e^{\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \otimes \sigma_-\, \sigma_+\,, \rho(\mathrm{t})\right\}\right) =$$

$$\gamma_1 \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\left(e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_-\ \rho(\mathrm{t})e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+ - \frac{1}{2}\left\{\hat{I}\otimes\sigma_+\ \sigma_-\ , \rho(\mathrm{t})\right\}\right) +$$

$$\gamma_2 \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\left(e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_+\ \rho(\mathrm{t})e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\sigma_- - \frac{1}{2}\left\{\hat{I}\otimes\sigma_-\ \sigma_+\ , \rho(\mathrm{t})\right\}\right). \qquad (3.12г)$$

НАПОМЕНА: У Шредингеровој слици се појављује још и комутатор стања са хамилтонијаном који је проширен Лембовим (у општем случају, и Штарковим) померајем. Овде је занемарен Доплеров ефекат услед узмака атома, јер је то мали допринос (посебно за атом веће масе).

3.13 Извести мастер једначину за центар маса атома узимањем трага по унутрашњим степенима слободе за мастер једначину у претходном задатку.

Решење: Уочимо да (3.12г) није добијена из микроскопских разматрања. Ипак, ослањајући се на Задатак 2.26, унапред знамо да Линдбладови оператори који су облика тензорског производа оператора за два подсистема, у општем случају, могу бити последица, како интеракције (које овде нема), тако и заједничког окружења (које овде није претпостављено). Отуда, сходно Задатку 2.26, не можемо очекивати потпуно независне мастер једначине за два подсистема – у мастер једначинама подсистема атома се морају наћи макар неке величине које носе зависност од другог подсистема. Исто тако, у Задатку 2.26 је било наглашено да се решења мастер једначине за независне подсистеме (који чине отворени систем) може тражити у облику тензорског производа, што би овде било облика: $\rho(\mathrm{t}) = \rho_{CM}(t) \otimes \rho_R(t)$. Задржавајући ову претпоставку (јер нема интеракције између CM и R, као што и нема заједничког окружења), узимањем трага по унутрашњим степенима слободе, једначина (3.12г) лако води изразу:

$$\frac{d\rho_{CM}(t)}{dt} = \gamma_1 p_e \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\rho_{CM}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \rho_{CM}(t)\right) +$$

$$\gamma_2 p_g \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\rho_{CM}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \rho_{CM}(t)\right),$$

(3.13а)

уз ознаке за попуњеност основног, $p_g = (tr_R\sigma_+\ \rho_R(\mathrm{t})\sigma_-) = tr_R(|1\rangle\langle 0|\rho_R(\mathrm{t})|0\rangle\langle 1|) = \langle 0|\rho_R(\mathrm{t})|0\rangle$, и побуђеног, $p_e = 1 - p_g$, нивоа. Како на апсолутној нули $\gamma_2 \to 0$ и $p_e \to 0$ (видети (3.11г)), дисипатор тежи нули и преостаје само унитарна динамика индукована комутатором који се појављује у Шредингеровој слици (видети Задатке 2.12 и 2.13), а који је овде испуштен јер није уписан ни у (3.12г) – читаоцу се оставља да, у овом смислу, допуни овде дате изразе.

НАПОМЕНА: Уочити зависност (3.13а) од подсистема R- кроз изразе за попуњеност његових енергијских нивоа, p_e и p_g (наравно, у моделу двонивоског система). Важно је истаћи: феноменолошко моделовање обављено у претходном задатку, у овом задатку је проширено претпоставком о облику у којем тражимо решење мастер једначине за цео атом, $\rho(\mathrm{t}) = \rho_{CM}(t) \otimes \rho_R(t)$. Ако би постојали разлози да се претпостави појављивање корелација између центра маса и унутрашњих степена слободе атома, у било ком тренутку и из било којих разлога, мастер једначина (3.13а) неће следити из (3.12г). Аналогно овоме следи и за разматрања у следећем задатку.

3.14 Извести и решити мастер једначину за унутрашње степене слободе атома полазећи од мастер једначине за цео атом, Задатка 3.12.

Решење: Аналогно претходном задатку (са свим аналогним претпоставкама):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\rho_R(t)}{dt} = \gamma_1 \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\Big(\Big(tr_{CM}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\rho_{CM}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Big)\sigma_-\,\rho_R(t)\sigma_+ - \\
&\frac{1}{2}\Big(tr_{CM}\rho_{CM}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Big)\{\sigma_+\,\sigma_-\,,\rho_R(t)\}\Big) + \\
&\gamma_2 \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\Big(\Big(tr_{CM}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\rho_{CM}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Big)\sigma_+\,\rho_R(t)\sigma_- - \\
&\frac{1}{2}\Big(tr_{CM}\rho_{CM}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Big)\{\sigma_-\,\sigma_+\,,\rho_R(t)\}\Big) = 4\pi\gamma_1\Big(\sigma_-\,\rho_R(t)\sigma_+ - \\
&\frac{1}{2}\{\sigma_+\,\sigma_-\,,\rho_R(t)\}\Big) + 4\pi\gamma_2\Big(\sigma_+\,\rho_R(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\,\sigma_+\,,\rho_R(t)\}\Big),
\end{aligned}
\tag{3.14а}
$$

што је, наравно, израз (3.11б), са множитељем 4π који потиче од интеграције по просторном углу.

Сада лако следе диференцијалне једначине за матричне елементе, памтећи да $p_1 = 1 - p_0$, и уврштавајући множилац 4π у факторе пригушења, γ_i:

$$\frac{dp_0}{dt} \equiv \frac{d\langle 0|\rho_R(t)|0\rangle}{dt} = \langle 0|\gamma_2\left(\sigma_+\,\rho_R(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\,\sigma_+\,,\rho_R(t)\}\right) + \gamma_1\left(\sigma_-\,\rho_R(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\,\sigma_-\,,\rho_R(t)\}\right)|0\rangle = \langle 0|\left[\gamma_2\left(|1\rangle\langle 0|\,\rho_R(t)|0\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}\{|0\rangle\langle 1|\,|1\rangle\langle 0|\rho_R(t) + \rho_R(t)|0\rangle\langle 1|\,|1\rangle\langle 0|\}\right) + \gamma_1\left(|0\rangle\langle 1|\,\rho_R(t)|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{2}\{|1\rangle\langle 0|\,|0\rangle\langle 1|\,\rho_R(t) + \rho_R(t)|1\rangle\langle 0|\,|0\rangle\langle 1|\}\right)\right]|0\rangle = -(\gamma_2\mathrm{p}_0 - \gamma_1\mathrm{p}_1) = -\left(\gamma_2\mathrm{p}_0 - \gamma_1(1-\mathrm{p}_0)\right) = \gamma_1 - (\gamma_1+\gamma_2)p_0. \tag{3.14б}$$

$$\frac{d\langle 0|\rho_R(t)|1\rangle}{dt} = \langle 0|\left[\gamma_2\left(|1\rangle\langle 0|\,\rho_R(t)|0\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}\{|0\rangle\langle 1|\,|1\rangle\langle 0|\,\rho_R(t) + \rho_R(t)|0\rangle\langle 1|\,|1\rangle\langle 0|\}\right) + \gamma_1\left(|0\rangle\langle 1|\,\rho_R(t)|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{2}\{|1\rangle\langle 0|\,|0\rangle\langle 1|\,\rho_R(t) + \rho_R(t)|1\rangle\langle 0|\,|0\rangle\langle 1|\}\right)\right]|1\rangle = -\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\langle 0|\rho_R(t)|1\rangle. \tag{3.14в}$$

Решавање диференцијалних једначина лако даје:

$$p_0(t) = \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}, \tag{3.14г}$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \tag{3.14д}$$

што у матричном облику гласи:

$$\rho_R(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} & \rho_{01}(0)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t/2} \\ \rho_{01}(0)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t/2} & \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} + \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} \end{pmatrix}, \tag{3.14ђ}$$

и то све у репрезентацији у којој је $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Очигледно је асимптотско понашање: $\lim_{t\to\infty} p_0\,(t) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} = 1 - \lim_{t\to\infty} p_1\,(t)$, $\lim_{t\to\infty} \rho_{01}\,(t) = 0$. Као успутно уочавање, приметимо: када температура тежи апсолутној нули следи $\gamma_2 \to 0$, па временом, независно од почетног стања, $p_0(t) \to \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} \to 1$; видети напомену уз Задатак 3.11.

НАПОМЕНА: Нестајање вандијагоналних елемената *не говори о декохеренцији* – која захтева стабилност *целог једног базиса* (не нужно ОНБ) у простору стања. Сменом ових резултата у Задатак 3.13, припремљена је анализа процеса датих у [4], одељак 4.3.3, што је мастер једначина добијена у 3.13. За центар маса има, макар формално, декохеренције, са стањима положаја као привилегованим („стабилним“) базисом – „базисом бројача“.

3.15 За Задатак 3.11 размотрити случај врло високе температуре и неефикасног детектора који не може да уочи промену броја фотона за само један (упијени, или израчени) фотон.

Решење: За врло високу температуру, $e^{h\omega/k_BT} \to 1 \Rightarrow n(\omega) \gg 1$. Тада се успоставља приближна равнотежа (скоро једнака вероватноћа) упијања и израчивања фотона од стране атома, јер тада $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Ако још приде детектор не може да разликује стања са $n(\omega)$ и $n(\omega) \pm 1$ фотона, тада унитарно (шредингеровски) следи, нпр.:

$$|E_m\rangle_R \otimes |n\rangle_{EMP} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|E_m + h\omega\rangle_R \otimes |n-1\rangle_{EMP} + |E_m - h\omega\rangle_R \otimes$$
$$|n+1\rangle_{EMP}\big) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|E_m + h\omega\rangle_R + |E_m - h\omega\rangle\rangle_R\big) \otimes |n\rangle_{EMP}. \qquad (3.15а)$$

То јест, слабост детектора (када је ЕМ поље „јако“, тј., када детектор не разликује стања $|n-1\rangle_{EMP}, |n+1\rangle_{EMP}$ и $|n\rangle_{EMP}$) води, ефективно, појављивању ЕМ поља као *спољашњег поља*, а не као динамичког система са којим атом интерагује и квантно сплиће; Дефиницијом 19 је ово препознато као „тривијална интеракција“. Тада се атом, у овом моделу, може сматрати затвореним системом у класичном спољашњем ЕМ пољу (које се динамички не мења, баш као што се, у физичким моделима, ни Кулоново поље кондензатора не мења упркос присуству наелектрисане честице у том пољу). У свему томе, интеракциони члан (3.11а) постаје „једночестични“ оператор, јер анихилациони и креациони оператори ЕМ поља не воде видљивом ефекту, па се може представити као $ga\sigma_+ + g^*a^*\sigma_-$, тј., као оператор који делује само на стања атома, када a (и a^*) представља само број, не и оператор.

НАПОМЕНА: Не може се пренагласити: коришћење унитарне динамике, као што је израз (3.15а), не само да не уноси методску неконзистентност, већ је *једини егзактан* поступак. Другим речима, *све мастер једначине су само приближан опис* динамике отворених система који следи из узимања трага по унитарној динамици целине. Детекција појединачних фотона је озбиљан захтев који у пракси није једноставан; а ове детекције су од прворазредног значаја у квантној криптографији (тј., у размени квантног кључа – Q*uantum* K*ey* D*istribution*). Ситуација овде од интереса јесте атом у врло јаком ласерском пољу (које не мора бити термализовано, и отуда се описује другачијим дисипатором од дисипатора датог у претходном задатку). Ту се ласерско поље по правилу сматра „класичним“, тј., није динамички систем који се квантно сплиће са атомом. Наравно, сплетености има (егзактно, ласерско поље је динамички систем), али *није уочљива* услед слабости детектора. Промена стања атома је присутна као последица утицаја „класичног“ ЕМ поља (спољашњег поља), али нема „радијативних прелаза“, тј., *уочљивих* упијања/израчивања светлости – чест случај и у динамици молекула у густом окружењу у неким хемијским сценаријима. Зато се понекад, у физици атома, стања суперпозиције као што је у изразу (3.15а), називају „тамним“. Њихов настанак је потпуно аналоган раздвајању снопа светлости (енг.: *beam splitting*) у оптици.

3.16 По аналогији са претходним задатком, извести услове под којима интеракција са окружењем може постати (приближно) сводива на спољашње поље, и то за: (а) полупропусно огледало, и (б) неузмак атома при израчивању/упијању светлости.

Решење: (а) Мисаони експеримент се састоји у судару једног фотона са огледалом које, ако пропусти фотон, рецимо са вероватноћом ½, нема узмак. Претпостављајући да је систем „фотон+огледало“ изолован, тј., описан временски независном Шредингеровом једначином, закон сачувања укупног импулса имплицира унитарно пресликавање, аналогно (3.15а):

$$|\vec{p}\rangle_f \otimes |0\rangle_o \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{p}\rangle_f \otimes |0\rangle_o + |\vec{p}'\rangle_f \otimes |\vec{p}-\vec{p}'\rangle_o\right). \qquad (3.16а)$$

Узимањем трага по огледалу (индекс „о“), стање фотона је мешано:

$$\rho_f = \frac{1}{2}\left(|\vec{p}\rangle_f\langle\vec{p}| + |\vec{p}'\rangle_f\langle\vec{p}'|\right). \qquad (3.16б)$$

Претпоставимо сада да је маса, M, огледала превелика да би се урачунавао узмак, тј., да важи $|\vec{p}-\vec{p}'|/M \approx 0$. Тада је $|0\rangle_o \approx |\vec{p}-\vec{p}'\rangle_o$, што сменом у горњи израз даје:

$$|\vec{p}\rangle_f \otimes |0\rangle_o \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{p}\rangle_f \otimes |0\rangle_o + |\vec{p}'\rangle_f \otimes |\vec{p}-\vec{p}'\rangle_o\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{p}\rangle_f + |\vec{p}'\rangle_f\right) \otimes |0\rangle_o, \tag{3.16в}$$

тј., огледало делује на фотон као извор спољашњег поља које је адитивни део хамилтонијана фотона, тј., спроводи унитарну динамику за фотон;

(б) Све је аналогно горе датом, када се изврше замене: уместо огледала појављује се центар маса атома, а уместо фотона се појављују унутрашњи степени слободе атома.

НАПОМЕНА: Потпуно аналогно се може добити у оквирима адијабатске апроксимације примењене на квантни модел атома водоника, за његову структуру „електрон+протон“. Овде дати услови за прелаз са нетривијалне интеракције на спољашње поље је само приближно, тј., апроксимација. *Остаје проблем* како то добити *егзактно*. Јер, нпр., не види се разлог за постојање узмака плочастог кондензатора када кроз њега пролази електрон (или електрична струја, чак и незанемарљиве јачине).

3.17 Полазећи од Краусових оператора (3.4ж), извести и решити мастер једначину (3.9а) за пригушење амплитуде једног кубита.

Решење: У овом задатку ће бити дата алтернатива сложеног поступка за добијање мастер једначине за процес задат у Краусовом облику.

Полазна тачка биће већ познато коначно стање, дато изразом (3.4з):

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-n_z)+(1-e^{-2\gamma t})(1+n_z) & e^{-\gamma t}n_+ \\ e^{-\gamma t}n_- & e^{-2\gamma t}(1+n_z) \end{pmatrix}. \tag{3.17а}$$

Претпоставимо да постоји само један Линдбладов оператор, L, који даје облик тражене мастер једначине:

$$\dot{\rho} = \Gamma\left(L\rho L^+ - \frac{1}{2}(L^+L\rho + \rho L^+L)\right). \tag{3.17б}$$

Једноставности ради, претпоставимо да од свих елемената алгебре једног кубита (двонивоског система), L може бити линеарни збир само Паулијевих оператора који су сви нултог трага, тј., претпоставимо да у изразу за L нема идентичног оператора. Тада потражимо L у матричном облику:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}. \tag{3.17в}$$

Наравно, непознати су чиниоци матрице (3.17в). Њих ћемо потражити сменом (3.17а,в) у (3.17б), одакле очекујемо скуп једначина по непознатим чиниоцима.

Прво, користећи (3.17а), запишимо леву страну (3.17б):

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\gamma e^{-2\gamma t}(1+n_z) & -\gamma e^{-\gamma t} n_+ \\ -\gamma e^{-\gamma t} n_- & -2\gamma e^{-2\gamma t}(1+n_z) \end{pmatrix}, \tag{3.17г}$$

што је трага нула, баш као и (сваки) дисипатор мастер једначине.

Десна страна (3.17б) је дата преко матричних елемената: $a_{11} = \frac{1}{4} e^{-2t\gamma}\Gamma(-4|c|^2 e^{2t\gamma} + a e^{t\gamma}((b + c^*)n_- + (c + b^*)n_+) + 2(|b|^2 + |c|^2)(1 + n_z))$, $a_{12} = \frac{1}{4} e^{-2t\gamma}\Gamma(-2a e^{2t\gamma}(b - 3c^*) + e^{t\gamma}\big(2bc^* n_- - (4a^2 + |b|^2 + |c|^2)n_+) - 2a(b + c^*)(1 + n_z)\big)$, $\mathrm{a}_{21} = \frac{1}{4} e^{-2t\gamma}\Gamma(2a e^{2t\gamma}(3c - b^*) + e^{t\gamma}((-4a^2 - |b|^2 - |c|^2)n_- + 2cb^* n_+) - 2a(c + b^*)(1 + n_z))$ и $a_{22} = \frac{1}{4} e^{-2t\gamma}\Gamma(4|c|^2 e^{2t\gamma} - a e^{t\gamma}((b + c^*)n_- + (c + b^*)n_+) - 2(|b|^2 + |c|^2)(1 + n_z))$.

Изједначавање са (3. 17г) даје две независне једнакости:

$$\frac{1}{4} e^{-2t\gamma}\Gamma(-4|c|^2 e^{2t\gamma} + a e^{t\gamma}((b + c^*)n_- + (c + b^*)n_+) + 2(|b|^2 + |c|^2)(1 + n_z)) = \gamma e^{-2\gamma t}(1 + n_z), \tag{3.17д}$$

$$\frac{1}{4} e^{-2t\gamma}\Gamma(-2a e^{2t\gamma}(b - 3c^*) + e^{t\gamma}(2bc^* n_- - (4a^2 + |b|^2 + |c|^2)n_+) - 2a(b + c^*)(1 + n_z)) = -\frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t} n_+. \tag{3.17ђ}$$

Сматрајући n_-, n_+ и n_z линеарно независним, прва једнакост води:

$$-4|c|^2e^{2t\gamma} = 0 = ae^{t\gamma}((b+c^*)n_- + (c+b^*)n_+), \frac{1}{2}e^{-2t\gamma}\Gamma(|b|^2 + |c|^2)(1+n_z) = \gamma e^{-2\gamma t}(1+n_z), \quad (3.17е)$$

одакле следи $c = 0$. Да би једнакости важиле за свако почетно стање (што је услов потпуне позитивности), мора и $a = 0$, па преостаје једнакост

$$\frac{1}{2}\Gamma|b|^2 = \gamma. \quad (3.17ж)$$

Бирајући $b = 1$, задовољена је и друга једнакост (што се лако може видети), $\Gamma = 2\gamma$ и, коначно,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17з)$$

што је, у одабраној репрезентацији (Задатак 3.4) у којој је $Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, заправо σ_- оператор.

Тако мастер једначина (у интеракционој слици) гласи:

$$\dot{\rho} = 2\gamma\left[\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}(\sigma_+\sigma_-\rho + \rho\sigma_+\sigma_-)\right], \quad (3.17и)$$

што је (3.9а). Решења су већ позната – једначина (3.17и) представља специјалан случај мастер једначине (3.14а). Потпуности ради, спроведимо поступак решавања (3.17и). Из (3.17и) следи:

$$\langle i|\dot{\rho}|j\rangle = \gamma[2\langle i|\sigma_-\rho\sigma_+|j\rangle - \langle i|\sigma_+\sigma_-\rho|j\rangle - \langle i|\rho\sigma_+\sigma_-|j\rangle] =$$
$$\gamma[2\langle i|(|0\rangle\langle 1|)\rho(|1\rangle\langle 0|)|j\rangle - \langle i|(|1\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 1|)\rho|j\rangle - \langle i|\rho(|1\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 1|)|j\rangle] =$$
$$\gamma\big[2\langle i|0\rangle\cdot\langle 0|j\rangle\rho_{11} - \langle i|1\rangle\rho_{1j} - \langle 1|j\rangle\rho_{i1}\big]. \quad (3.17ј)$$

Одатле се добија систем једначина:

$$\frac{d\rho_{00}}{dt} = 2\gamma\,\rho_{11}$$

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = -2\gamma\,\rho_{11}$$

$$\frac{d\rho_{01}}{dt} = -\gamma\rho_{01}. \quad (3.17к)$$

Из (3.17к) лако следи: $\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-\gamma t}, \rho_{10}(t) = \rho_{10}(0)e^{-\gamma t}, \rho_{11}(t) = \rho_{11}(0)e^{-2\gamma t}$. Сменом последњег у прву једначину лако се добија: $\rho_{00}(t) = \rho_{00}(0) + \rho_{11}(0)(1 - e^{-2\gamma t})$. Тако, у матричном облику (у истој репрезентацији као и (3.17а)), решење гласи:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{11}(0)e^{-2\gamma t} & \rho_{10}(0)e^{-\gamma t} \\ \rho_{01}(0)e^{-\gamma t} & \rho_{11}(0)e^{-2\gamma t} \end{pmatrix}. \qquad (3.17л)$$

У асимптотском лимесу, $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, што је у изабраној, нестандардној, репрезентацији $Z \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, основно стање атома. Ово стање је, и стационарно стање (СС) (тј., испуњава услове Дефиниције 21), и асимптотско стање (АС) за разматрани процес.

НАПОМЕНА: Овде уочено стање биће препознато и као АСС – асимптотско стање система – у Задатку 3.36. Супротан пример, у смислу да је добијено стационарно стање које није АСС (видети опште ставове у теоријском уводу) је дато у Задатку 3.20, први део, који се тиче интеракционе слике. У терминима Блоховог вектора, $n(t) = \{n_x(t), n_y(t), n_z(t)\}$, у одабраној репрезентацији, опште стање се записује као матрица $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - n_z(t) & n_+(t) \\ n_-(t) & 1 + n_z(t) \end{pmatrix}$. Тада у $t = 0$, решење (3.17л) је матричног облика $\begin{pmatrix} 1 - \rho_{11}(0) & \rho_{10}(0) \\ \rho_{01}(0) & \rho_{11}(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - n_z(0) & n_+(0) \\ n_-(0) & 1 + n_z(0) \end{pmatrix}$, одакле $\rho_{11}(0) = \frac{1+n_z(0)}{2}$, па одговарајуће координате Блоховог вектора гласе: $n_z(t) = -1 + (1 + n_z(0))e^{-2\gamma t}$, $n_-(t) = n_-(0)e^{-\gamma t} = n_+^*(t)$. Како је $n_\pm = n_x \pm i n_y$, то лако следи израз за динамику у терминима Блоховог вектора:

$$\vec{n}(t) = \{n_x(0)e^{-\gamma t}, n_y(0)e^{-\gamma t}, n_z = -1 + (1 + n_{\ z}(0))e^{-2\gamma t}\}. \qquad (3.17м)$$

3.18 Решити мастер једначину (тзв., декохеренција положаја квантне честице) у интеракционој слици:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\gamma[x, [x, \rho]], \qquad (3.18а)$$

где x представља опсерваблу положаја једнодимензионалне квантне честице, док реална константа $\gamma > 0$. Доказати да у овом моделу енергија честице бесконачно расте.

Решење: Прво, горња мастер једначина се може преписати у (операторски) облик:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma[2x\rho x - x^2\rho - \rho x^2]. \tag{3.18б}$$

Преласком на координатну репрезентацију, $\langle x|\rho(t)|x'\rangle \equiv \rho(x, x', t)$,

$$\frac{d\rho(x,x',t)}{dt} = \langle x|\gamma[2x\rho x - x^2\rho - \rho x^2]|x'\rangle = \gamma[2\langle x|x\rho x|x'\rangle - \langle x|x^2\rho|x'\rangle - \langle x|\rho x^2|x'\rangle] = \gamma[2xx'\rho(x,x',t) - x^2\rho(x,x',t) - \rho(x,x',t)x'^2] = \gamma\big[2xx' - x^2 - {x'}^2\big]\rho(x,x',t) = -\gamma(x-x')^2\rho(x,x',t), \tag{3.18в}$$

чије је очигледно решење:

$$\rho(x,x,t) = \rho(x,x,0), \forall x, t \in \mathbb{R},$$

$$\rho(x,x',t) = \rho(x,x',0)e^{-\gamma t(x-x')^2}, \forall x, x' \in \mathbb{R}. \tag{3.18г}$$

Ови изрази описују „(квантну) декохеренцију“, у овом случају положаја честице: вандијагонални елементи временом трну, тј. израз (1.13е), $\lim_{t\to\infty}\rho(x,x',t) = 0, \forall x \neq x' \in \mathbb{R}$.

Пораст средње енергије, $\langle H\rangle = trH\rho$, непосредно следи из мастер једначине, за сваки хамилтонијан (општости ради, овде радимо у Шредингеровој слици, у којој се појављује и комутатор $-i[H,\rho], h = 1$):

$$\frac{d\langle H\rangle}{dt} = tr\frac{d(H\rho)}{dt} \approx -itr(H[H,\rho]) - \gamma tr\big(H\big[x,[x,\rho]\big]\big) = -itr([H,H]\rho) - \gamma tr([H,x][x,\rho]) = -\gamma tr([H,x][x,\rho]) \neq 0, \tag{3.18д}$$

јер $[H,x] \neq 0$; изнад је коришћено комутирање под трагом: $tr(A[B,C]) = tr([A,B]C)$. Не само да се енергија не одржава, већ отворени систем упија енергију:

$$\frac{d\langle H\rangle}{dt} = -\gamma tr\left(-i\frac{p}{m}[x,\rho]\right) = i\frac{\gamma}{m}tr([p,x]\rho) = \frac{\gamma}{m} > 0, \qquad (3.18ђ)$$

то јест, средња енергија расте са временом, и то неограничено: $\langle H(t)\rangle = \langle H(0)\rangle + \frac{\gamma}{m}t$. (Занимљиво: у лимесу бесконачне масе, нема увећања енергије.)

3.19 За процес уведен у претходном задатку, доказати да су „кохерентна стања (КС)“ (тј., стања са минималном неодређеношћу) која дефинишу „оштре“ гаусијанске густине вероватноће приближно стационарна стања.

Решење: Довољно је доказати да дисипатор (у интеракционој слици) преводи КС у нулу, тј., да важи:

$$\mathcal{D}[\rho] = 2x\rho x - x^2\rho - \rho x^2 \approx 0 \qquad (3.19а)$$

за „кохерентна стања“ задата таласном функцијом: $\psi(x) = (\lambda/\pi)^{1/4}e^{-\lambda x^2/2+ipx/h}$, то јест:

$$\rho(x,x') = \psi(x)\psi^*(x') = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x^2+x'^2)/2+ip(x-x')/h}. \qquad (3.19б)$$

Како већ знамо из претходног задатка:

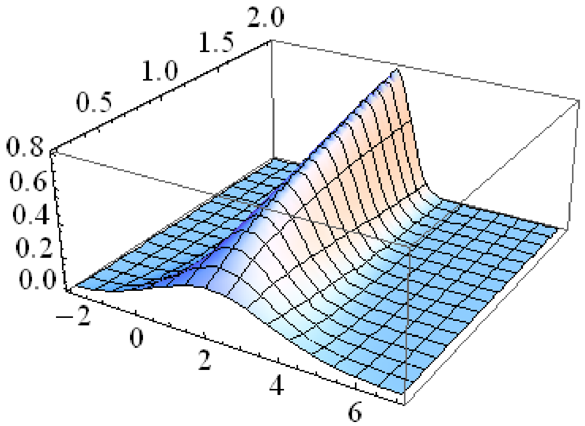
$$\langle x|2x\rho x - x^2\rho - \rho x^2|x'\rangle = (x-x')^2\langle x|\rho|x'\rangle, \qquad (3.19в)$$

сменом КС у горњи израз добија се функција веома малих апсолутних вредности:

$$(x-x')^2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x^2+x'^2)/2} \ll 1, \qquad (3.19г)$$

за „оштре Гаусијане“ код којих $\lambda \gg 1$. Занемарљивост недијагоналних чланова потврђује став исказан у поставци овог задатка.

НАПОМЕНА: 1. Због овога (тј., због занемарљивих вандијагоналних чланова, $\langle x|\rho|x'\rangle \ll 1$, за $x \neq x'$) се понекад каже да су КС „најкласичнија“ од свих квантних стања. При томе, за велико λ, КС су гаусијани са врло оштрим врхом, а у лимесу $\lambda \to \infty$, КС теже Дираковој „делта функцији“, што се може видети са слике испод (матрица густине за $x' = 2$ и $\lambda \in [0.2, 2], x \in [-2,7]$); 2. Познато је да су *приближна* стационарна стања свих Марковљевих процеса (мастер једначина Линдбладовог облика) са Линдбладовим операторима који чине Лијеву групу, такозвана, „уопштена кохерентна стања“[19]; овде су стационарна стања стандардна „кохерентна стања“ за оператор положаја и импулса једнодимензионалне квантне честице. За оператор спина, са ограничењем на велике вредности спина, постоје спинска уопштена кохерентна стања.



Пораст λ (од 0.2 до 2) води све оштријем врху гаусијанима.

3.20 Решити мастер једначину:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma\,(X\rho X - \rho), \tag{3.20a}$$

где је X Паулијев оператор за спин ½, а константа $\gamma > 0$.

Решење: Како нема комутаторског члана, задата једначина је у интеракционој слици. Одмах се види да је процес унитолан, тј., да се идентични оператор не мења, јер: $XIX - I = X^2 - I = 0$. То јест, оба својствена пројектора опсервабле X се не мењају под датим пресликавањем: $XP_iX - P_i = P_iX^2 - P_i = 0$, $P_i = |i\rangle\langle i|, i = 0,1$ где се појављују својствена стања, $|i\rangle$, Паулијеве опсервабле X.

---

[19] S. Boixo et al, EPL **79**, 40003 (2007).

Зато ћемо решавати једначину у X-репрезентацији:

$$\frac{d\langle i|\rho|j\rangle}{dt} = \gamma\ (\langle i|X\rho X|j\rangle - \langle i|\rho|j\rangle),$$ (3.20б)

узимајући да важи: $X\lfloor 0\rangle = \lfloor 0\rangle, X\lfloor 1\rangle = -\lfloor 1\rangle$. Сада лако следи:

$$\frac{d\rho_{00}}{dt} = \gamma(\langle 0|\rho|0\rangle - \langle 0|\rho|0\rangle) = 0$$

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho_{01}}{dt} = -2\gamma\rho_{01}.$$ (3.20в)

Отуда следи матрични запис решења једначина (3.20в):

$$\begin{pmatrix} \rho_{00}(0) & \rho_{10}(0)e^{-2\gamma t} \\ \rho_{01}(0)e^{-2\gamma t} & \rho_{11}(0) \end{pmatrix},$$ (3.20г)

који опет говори о декохеренцији (нестанку вандијагоналних елемената стања) у „базису бројача“ који је својствени базис Линдбладовог оператора X (који је овде „опсервабла бројача“). Отуда је разматрана мастер једначина модел, у диференцијалном облику закона кретања, и за процес квантног мерења опсервабле X. Приметимо још да (3.20в) јасно истиче: свако стање са $\rho_{10}(0) = 0$ је стационарно стање, па није јединствено АСС (видети теоријски увод).

У Шредингеровој слици се појављује комутатор, па мастер једначина добија облик (h=1):

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \gamma(X\rho X - \rho).$$ (3.20д)

Ставимо да је хамилтонијан облика: $H = \omega Z/2$. Пратећи решење у интеракционој слици, потражимо једначине за елементе стања у истој, X, репрезентацији:

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = -\frac{i\omega}{2}\langle i|[Z,\rho]|j\rangle + \gamma\left(\langle i|X\rho X|j\rangle - \rho_{ij}\right).$$ (3.20ђ)

Експлицитно растављање: $\langle i|[Z,\rho]|j\rangle = \langle i|Z\rho - \rho Z|j\rangle =$ $\sum_k \langle i|(Z(|k\rangle\langle k|)\rho - \rho(|k\rangle\langle k|)Z)|j\rangle = \sum_k (\langle i|Z|k\rangle \cdot \langle k|\rho|j\rangle -$ $\langle i|\rho|k\rangle \cdot \langle k|Z|j\rangle)$. (3.20е)

Памтећи да су дијагонални елементи $\langle i|Z|i\rangle = 0$, док $\langle 0|Z|1\rangle = -i$, следи:

$$\frac{d\rho_{00}}{dt} = -\omega\, Re\rho_{10}$$

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \omega\, Re\rho_{10}$$

$$\frac{d\rho_{10}}{dt} = \frac{\omega}{2}(1 - 2\rho_{11}) - 2\gamma\rho_{10}\ . \tag{3.20ж}$$

Како је ρ_{10} у општем случају комплексан број за сваки тренутак времена, последња једначина се разбија на две независне једначине:

$$\frac{dRe\rho_{10}}{dt} = \frac{\omega}{2}(1 - 2\rho_{11}) - 2\gamma Re\rho_{10},$$

$$\frac{dIm\rho_{10}}{dt} = -2\gamma Im\rho_{10}. \tag{3.20з}$$

Друга од ових двеју једначина решена је у оквиру решавања за интеракциону слику: $Im\rho_{10}(t) = Im\rho_{10}(0)\ e^{-2\gamma t}$. Преостају остале три, повезане, једначине. Диференцирањем једначине за $Re\rho_{10}$ и сменом једначина за дијагоналне елементе добија се диференцијална једначина:

$$\frac{d^2 Re\rho_{10}}{dt^2} + 2\gamma\frac{dRe\rho_{10}}{dt} + \omega^2 Re\rho_{10} = 0. \tag{3.20и}$$

Решење следи из решења, $r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, карактеристичне једначине, $r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$:

$$Re\rho_{10} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{3.20ј}$$

Сменом овога у једначине (3.20ж) за дијагоналне елементе, лако следе изрази:

$$\rho_{00} = -\frac{C_1\omega}{r_1}e^{r_1 t} - \frac{C_2\omega}{r_2}e^{r_2 t} + A,$$

$$\rho_{11} = \frac{C_1\omega}{r_1} e^{r_1 t} + \frac{C_2\omega}{r_2} e^{r_2 t} + B. \qquad (3.20к)$$

Мастер једначина је Марковљевог типа, па ћемо зато претпоставити да је $\gamma \ll \omega$ (што одговара слабој интеракцији [2]), тј., да се може писати $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \approx i\omega$. Тада горња решења добијају јасно раздвојен осцилаторни од "пригушеног" режима:

$$\rho_{10} = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) + iIm\rho_{10}(0)\, e^{-2\gamma t},$$

$$\rho_{00} = -e^{-\gamma t}\left(\frac{C_1\omega}{-\gamma+i\omega} e^{i\omega t} - \frac{C_2\omega}{\gamma+i\omega} e^{-i\omega t}\right) + A,$$

$$\rho_{11} = e^{-\gamma t}\left(\frac{C_1\omega}{-\gamma+i\omega} e^{i\omega t} - \frac{C_2\omega}{\gamma+i\omega} e^{-i\omega t}\right) + B. \qquad (3.20л)$$

Даље решавање води налажењу константи C_1, C_2, A, B, које зависе само од почетних услова – почетног стања, тј., почетних вредности за матричне елементе $\rho_{ij}(0)$, за које важи $\left|\rho_{ij}(0)\right| < 1, \forall i, j = 0{,}1$. Отуда је очигледно да се, као и у интеракционој слици, само вандијагонални елементи губе, док дијагонални имају асимптотске ($t \to \infty$) вредности A и B. Још једном вреди нагласити да ово важи само у X-репрезентацији! (У теорији декохеренције, базис у којем (неки) вандијагонални елементи нестају назива се „базисом бројача" – видети Задатак 1.13.)

3-21 Проверити Марковљев карактер пресликавања изучаваних у Задацима 3.1-3.6.

Решење: По Дефиницији 20, Марковљева динамика је (линеарна, локална у времену и инвертибилна) потпуно позитивна и диференцијабилна динамика, али тако да је свако пресликавање са ненултим почетним тренутком и само потпуно позитивно. Како се сви случајеви разматрани у поменутим задацима тичу коначнодимензионалног простора стања, то се може применити поступак примењен у овим задацима, а који укључује „динамичку матрицу" за ненулти почетни тренутак.

(а) Задатак 3.1 (пригушење фазе). Овај процес нема сингуларитет за временске тренутке који падају у временски интервал $\big(n\pi/2\omega,(n+2)\pi/2\omega\big), n \neq 0$. Пресликавање за *ненулти* временски тренутак s је дато изразом (3.1ђ):

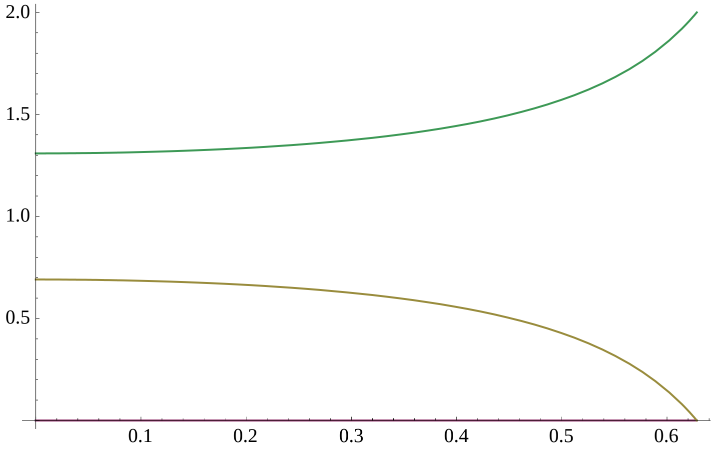
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.21а}$$

одакле следи придружена динамичка матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos\omega t}{\cos\omega s} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.21б}$$

чије својствене вредности, $\{\{0,0,(\mathrm{Cos}[s\omega]-\mathrm{Cos}[t\omega])\mathrm{Sec}[s\omega],(\mathrm{Cos}[s\omega]+\mathrm{Cos}[t\omega])\mathrm{Sec}[s\omega]\}$, могу бити негативне за неке временске тренутке. Отуда динамичка матрица није позитивна, па ни процес није потпуно позитиван.

Негативне својствене вредности динамичке матрице се не појављују за (горе истакнуте) временске интервале, нпр., $[0,\pi/2\omega]$, за који је утврђена растављивост пресликавања (Задатак 3.1), за сваку фреквенцију ω. Ово је потврђено Сликом 3.3, за избор $\omega=2, t=\pi/5<\pi/2\omega$.



Слика 3.3. Својствене вредности динамичке матрице (3.21б) за избор параметара: $\omega = 2, t = \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2\omega}, s \in [0, t]$.

Дакле, пригушење фазе *није Марковљев процес*. Размотримо још и случај кратког временског интервала, $s < t < 1$. Тада се може писати $\cos t \approx 1 - t^2/2$, што сменом у (3.21а,б) даје матрице чије својствене вредности лако следе, редом: $1, \frac{1-\frac{t^2}{2}}{1-\frac{s^2}{2}}$ и $0, \frac{1-\frac{t^2}{2}}{1-\frac{s^2}{2}}$, што сведочи о инвертибилности (3.21а) и позитивности (3.21б), а ово друго о потпуној позитивности пресликавања за кратке временске интервале – што смо унаперд знали из општих разматрања Задатка 2.7(в);

(б) Задатак 3.4 за пригушење амплитуде. Пресликавање за *ненулти* почетни тренутак, израз (3.4м), гласи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - e^{-2(t-s)\gamma} \\ 0 & e^{-(t-s)\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-s)\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2(t-s)\gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.21в}$$

па је отуда динамичка матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-(t-s)\gamma} \\ 0 & 1 - e^{-2(t-s)\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-(t-s)\gamma} & 0 & 0 & e^{-2(t-s)\gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.21г}$$

са ненегативним својственим вредностима: $0, 0, 1 + e^{2(s-t)\gamma}, 1 - e^{-2(-s+t)\gamma}$, што потврђује Марковљевост динамике;

(в) Задатак 3.5 (уопштено пригушење амплитуде). Пресликавање за *ненулти* почетни тренутак, израз (3.5и) гласи:

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{s-t}{T}}(-1+p)+p & 0 & 0 & p\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right) \\ 0 & \sqrt{e^{\frac{s-t}{T}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{e^{\frac{s-t}{T}}} & 0 \\ \left(1-e^{\frac{s-t}{T}}\right)(1-p) & 0 & 0 & 1+\left(-1+e^{\frac{s-t}{T}}\right)p \end{pmatrix}. \qquad (3.21д)$$

Динамичка матрица је отуда облика:

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{s-t}{T}}(-1+p)+p & 0 & 0 & \sqrt{e^{\frac{s-t}{T}}} \\ 0 & p\left(1-e^{-\frac{t-s}{T}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-e^{\frac{s-t}{T}}\right)(1-p) & 0 \\ \sqrt{e^{\frac{s-t}{T}}} & 0 & 0 & 1+\left(-1+e^{\frac{s-t}{T}}\right)p \end{pmatrix}, \qquad .(3.21ђ)$$

Својствене вредности динамичке матрице су дате изразима (који се могу и додатно средити):

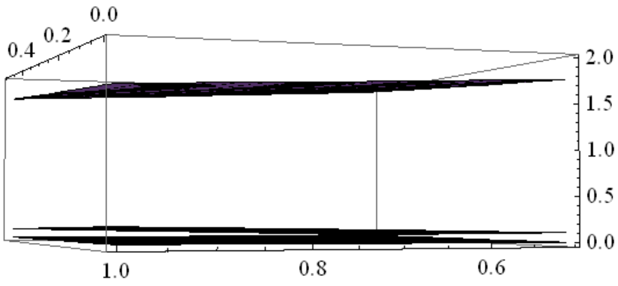
$(1-e^{\frac{s-t}{T}})(1-p),$

$p-e^{\frac{s-t}{T}}p,$

$\frac{1}{2}e^{-\frac{2t}{T}}\left(e^{\frac{2t}{T}}+e^{\frac{s+t}{T}}+\sqrt{2}\sqrt{e^{\frac{s+3t}{T}}\left(1-4(-1+p)p+(1-2p)^2\mathrm{Cosh}\left[\frac{s-t}{T}\right]\right)}\right),$

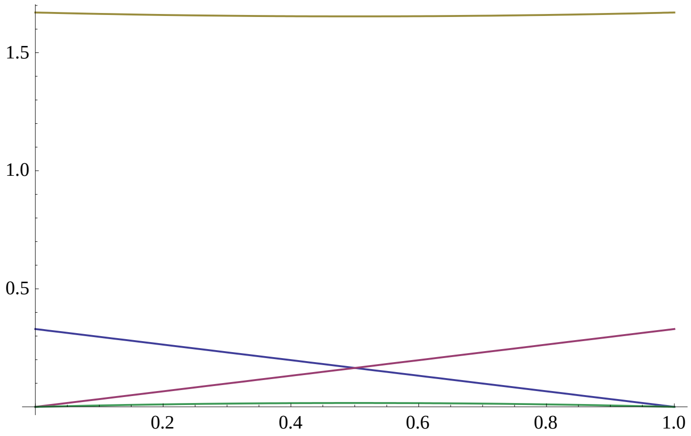
$$\frac{1}{2}e^{-\frac{2t}{T}}\left(e^{\frac{2t}{T}}+e^{\frac{s+t}{T}}-\sqrt{2}\sqrt{e^{\frac{s+3t}{T}}\left(1-4(-1+p)p+(1-2p)^2\mathrm{Cosh}\left[\frac{s-t}{T}\right]\right)}\right). \qquad (3.21е)$$

Графички представљене, све својствене вредности су ненегативне (овде је направљен избор параметара: $p=0.5, T=2, s\in[0,1/2], t\in[1/2,1]$):



Слика 3.4. Својствене вредности динамичке матрице (3.21е), за избор параметара: $p = 0.5, T = 2, s \in [0,1/2], t \in [1/2,1]$.

док за избор $s = 0.1, t = 0.9, T = 2$, својствене вредности у функцији вероватноће:



Слика 3.5. Својствене вредности динамичке матрице (3.21е), за избор параметара:

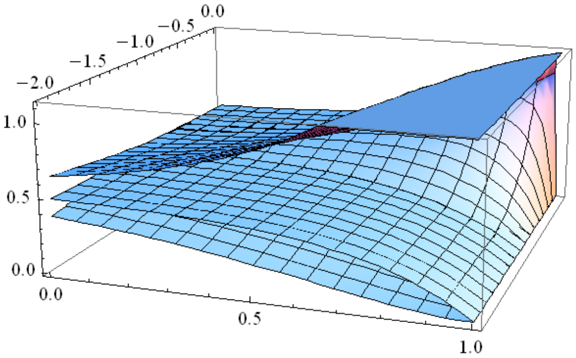
$T = 2, s = 0.1, t = 0.9$, у функцији веровартноће $p \in [0,1]$.

одакле следи закључак о потпуној позитивности динамичке матрице за пресликавање од ненултог почетног тренутка. То јест, само пресликавање (динамика) је Марковљево;

(г) Задатак 3.6 (уопштена деполаризација). Репрезентациона матрица процеса за *ненулти* почетни тренутак дата је изразом (3.6д), па матрична репрезентација динамичке мапе за ненулти почетни тренутак гласи:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+e^{4(s-t)\gamma}\right) & 0 & 0 & e^{\frac{4(-s+t)\gamma}{\Omega}} \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-e^{4(s-t)\gamma}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1-e^{4(s-t)\gamma}\right) & 0 \\ e^{\frac{4(-s+t)\gamma}{\Omega}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+e^{4(s-t)\gamma}\right) \end{pmatrix}, \qquad (3.21ж)$$

Чије су својствене вредности: $\{\frac{1}{2}(1-e^{4(s-t)\gamma}), \frac{1}{2}(1-e^{4(s-t)\gamma}), \frac{1}{2}(1+e^{4(s-t)\gamma} - 2e^{\frac{4(-s+t)\gamma}{\Omega}}), e^{\frac{4(-s+t)\gamma}{\Omega}} + \frac{1}{2}(1+e^{4(s-t)\gamma})\}$, чију позитивност потврђује график испод, за $\gamma = 1$ и $t = 1$.



Слика 3.6. Својствене вредности динамичке матрице (3.21ж) за вредности параметара $\gamma = 1$ и $t = 1$, за променљиве $\Omega \in [-2,0], s \in [0,1]$.

Ово, наравно, значи Марковљевост динамике.

3.22 Дати решења Задатака 3.14 и 3.17 у Шредингеровој слици за сопствени хамилтонијан система: (а) $H_S = \varepsilon X$, (б) $H_S = \delta Z$.

Решење: Сходно изразу (2.10д), позната решења добијена у интеракционој слици се непосредно преводе у Шредингерову слику (означену тилдом): $\rho_S(t) = U(t)\tilde{\rho}_S(t)U^+$, где је $U(t) = e^{-iH_S t/h}$. Отуда је довољно наћи матричну репрезентацију за $U(t)$ и применити је на матрични облик решења за процесе анализоване у датим задацима. При томе, у Задатку 3.14 коришћена је стандардна репрезентација у којој је Паулијева z-матрица облика $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, док је у Задатку 3.17 коришћена друга репрезентација, $Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, што се не одражава на матричну репрезентацију Паулијевог X оператора.

(а) $U(t) = e^{-i\varepsilon tX/h} = \cos\frac{\varepsilon t}{h} - iX\sin\frac{\varepsilon t}{h}.$

У матричној репрезентацији одабраној у Задатку 3.14, унитарни оператор репрезентује се матрицом:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\varepsilon t}{h} & -i\sin\frac{\varepsilon t}{h} \\ -i\sin\frac{\varepsilon t}{h} & \cos\frac{\varepsilon t}{h} \end{pmatrix},$$

што коришћењем решења Задатка 3.14 даје стање у Шредингеровој слици:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\varepsilon t}{h} & -i\sin\frac{\varepsilon t}{h} \\ -i\sin\frac{\varepsilon t}{h} & \cos\frac{\varepsilon t}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} & \rho_{01}(0)e^{-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)t}{2}} \\ \rho_{01}(0)e^{-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)t}{2}} & \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} + \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\varepsilon t}{h} & i\sin\frac{\varepsilon t}{h} \\ i\sin\frac{\varepsilon t}{h} & \cos\frac{\varepsilon t}{h} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{e^{-t(\gamma_1+\gamma_2)}\text{Cos}\left[\frac{2t\epsilon}{h}\right]\left(2(-1+p_0)\gamma_1 + e^{t(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2) + 2p_0\gamma_2\right)}{2(\gamma_1+\gamma_2)} & \frac{e^{-t(\gamma_1+\gamma_2)}\left(-i\text{Sin}\left[\frac{2t\epsilon}{h}\right]\left(2(-1+p_0)\gamma_1 + e^{t(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2) + 2p_0\gamma_2\right) + 2e^{\frac{1}{2}t(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1+\gamma_2)\rho_{01}\right)}{2(\gamma_1+\gamma_2)} \\ \frac{i\text{Sin}\left[\frac{2t\epsilon}{h}\right](\gamma_1-\gamma_2)}{2(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{ie^{-t(\gamma_1+\gamma_2)}\text{Sin}\left[\frac{2t\epsilon}{h}\right]\left((-1+p_0)\gamma_1 + p_0\gamma_2\right)}{\gamma_1+\gamma_2} + e^{-\frac{1}{2}t(\gamma_1+\gamma_2)}\rho_{01} & \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{-t(\gamma_1+\gamma_2)}\text{Cos}\left[\frac{2t\epsilon}{h}\right]\left(2(-1+p_0)\gamma_1 + e^{t(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2) + 2p_0\gamma_2\right)}{\gamma_1+\gamma_2}\right) \end{pmatrix}$$

Како избор репрезентације не утиче на матрични облик Паулијевог X оператора, коришћењем (3.17а) добија се тражени матрични облик стања у Шредингеровој слици:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\varepsilon t}{h} & -i\sin\frac{\varepsilon t}{h} \\ -i\sin\frac{\varepsilon t}{h} & \cos\frac{\varepsilon t}{h} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-n_z) + (1-e^{-2\gamma t})(1+n_z) & e^{-\gamma t}n_+ \\ e^{-\gamma t}n_- & e^{-2\gamma t}(1+n_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\varepsilon t}{h} & i\sin\frac{\varepsilon t}{h} \\ i\sin\frac{\varepsilon t}{h} & \cos\frac{\varepsilon t}{h} \end{pmatrix} =$$

$$(\begin{array}{cc} 1 - \frac{1}{2}ie^{-t\gamma}\text{Sin}[\frac{2t\epsilon}{h}](n_- - n_+) + e^{-2t\gamma}\text{Cos}[\frac{2t\epsilon}{h}](-1 + e^{2t\gamma} - n_z) & \frac{1}{2}e^{-2t\gamma}(e^{t\gamma}(n_- + n_+ + \text{Cos}[\frac{2t\epsilon}{h}](-n_- + n_+)) + 2i\text{Sin}[\frac{2t\epsilon}{h}](-1 + e^{2t\gamma} - n_z)) \\ \frac{1}{2}e^{-2t\gamma}(e^{t\gamma}(n_- + \text{Cos}[\frac{2t\epsilon}{h}](n_- - n_+) + n_+) - 2i\text{Sin}[\frac{2t\epsilon}{h}](-1 + e^{2t\gamma} - n_z)) & 1 - \text{Cos}[\frac{2t\epsilon}{h}] + \frac{1}{2}ie^{-t\gamma}\text{Sin}[\frac{2t\epsilon}{h}](n_- - n_+) + e^{-2t\gamma}\text{Cos}[\frac{2t\epsilon}{h}](1 + n_z) \end{array})$$

(б) $U(t) = e^{-i\varepsilon tZ/h} = \cos\frac{\varepsilon t}{h} - iZ\sin\frac{\varepsilon t}{h}$

што за Задатак 3.14 даје матричну репрезентацију унитарног оператора:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varepsilon t}{h}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varepsilon t}{h}} \end{pmatrix},$$

па је тражени облик стања у Шредингеровој слици за овај процес дат изразом:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varepsilon t}{h}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varepsilon t}{h}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right) e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} & \rho_{01}(0) e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t/2} \\ \rho_{01}(0) e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t/2} & \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} + \left(p_0(0) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right) e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon t}{h}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varepsilon t}{h}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} + e^{-t(\gamma_1+\gamma_2)} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} - p_0(0)\right) & e^{-\frac{2i\varepsilon \mathrm{t}}{h} - \frac{1}{2}t(\gamma_1+\gamma_2)} \rho_{01}(0) \\ e^{\frac{2i\varepsilon \mathrm{t}}{h} - \frac{1}{2}t(\gamma_1+\gamma_2)} \rho_{01}(0) & \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} + e^{-t(\gamma_1+\gamma_2)} \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} + p_0(0)\right) \end{pmatrix}$$

Када је у питању Задатак 3.17, унитарни оператор је матричног облика:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon t}{h}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varepsilon t}{h}} \end{pmatrix},$$

што води новом облику за стање:

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon t}{h}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varepsilon t}{h}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-n_z) + (1-e^{-2\gamma t})(1+n_z) & e^{-\gamma t} n_+ \\ e^{-\gamma t} n_- & e^{-2\gamma t}(1+n_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varepsilon t}{h}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varepsilon t}{h}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-n_z + (1-e^{-2t\gamma})(1+n_z) & e^{\frac{2it\epsilon}{h}} e^{-\gamma t} n_+ \\ e^{-\frac{2it\epsilon}{h}} e^{-\gamma t} n_- & e^{-2\gamma t}(1+n_z) \end{pmatrix}$$

3.23 Решити конјуговану мастер једначину (за опсервабле у Хајзенберговој слици): (а) за центар маса атома за опсервабле положаја и импулса, и (б) за Паулијеве операторе унутрашњих степена слободе атома.

Решење: Од интереса су Марковљеви процеси за које су мастер једначине Линдбладовог облика. Ако је мастер једначина Линдбладовог облика са константним факторима пригушења и временски независним Линдбладовим операторима:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{h}[H,\rho] + \sum_k \gamma_k \left(L_k \rho L_k^+ - \frac{1}{2}\{L_k^+ L_k, \rho\}\right),$$

тада је конјугована мастер једначина дата изразом:

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{h}[H, A_H] + \sum_k \gamma_k \left(L_k^+ A_H L_k - \frac{1}{2}\{L_k^+ L_k, A_H\} \right),$$

где је A_H оператор у Хајзенберговој слици.

(а) Од интереса је мастер једначина (3.13а), па конјугована мастер једначина гласи:

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{h}[H, A_H] + \gamma_1 p_e \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} A_H e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - A_H \right) +$$
$$\gamma_2 p_g \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} A_H e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - A_H \right).$$

Тако адјунговане мастер једначине гласе:

$$\frac{d\vec{r}_H}{dt} = \frac{i}{h}[H, \vec{r}_H] + \gamma_1 p_e \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{r}_H e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{r}_H \right) +$$

$$\gamma_2 p_g \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{r}_H e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{r}_H \right),$$

$$\frac{d\vec{p}_H}{dt} = \frac{i}{h}[H, \vec{p}_H] + \gamma_1 p_e \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{p}_H e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{p}_H \right) +$$
$$\gamma_2 p_g \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{p}_H e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{p}_H \right).$$

Алгебарске релације од интереса: $\vec{r}_H = \vec{r} + \frac{t}{m}\vec{p}, \vec{p}_H = \vec{p},\ \ e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{p}_H e^{\mp\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{p} \mp h\vec{k}, e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{r}_H e^{\mp i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{r}_H \mp \frac{th}{m}\vec{k},$ док $[H, \vec{r}_H] = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m}, \vec{r} + \frac{t}{m}\vec{p}\right] = -\frac{1}{2m} 2ih\vec{p} = -ih\frac{\vec{p}_H}{m}$ и $[H, \vec{p}_H] = 0$, па адјунговане мастер једначине добијају облик:

$$\frac{d\vec{r}_H}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p}_H + \gamma_1 p_e \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(-\frac{th}{m}\vec{k} \right) + \gamma_2 p_g \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(\frac{th}{m}\vec{k} \right) = \frac{\vec{p}_H}{m} + \frac{th}{m}\big(\gamma_2 p_g -$$
$$\gamma_1 p_e\big) \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\, \vec{k} \equiv \frac{\vec{p}_H}{m} + \frac{t}{m}\vec{C},$$

и

$$\frac{d\vec{p}_H}{dt} = \gamma_1 p_e \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(-h\vec{k} \right) + \gamma_2 p_g \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega} \left(h\vec{k} \right) = h\big(\gamma_2 p_g - \gamma_1 p_e\big) \int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\, \vec{k} \equiv \vec{C}.$$

Израз (3.14г) даје временску зависност за попуњеност нивоа унутрашњих енергија атома, што допуњује диференцијалне једначине за положај и импулс центра маса атома. Међутим, како $\int \mathrm{d}^2\overrightarrow{\Omega}\,\vec{k} = 0$, следе решења која важе и за изоловани центар маса:

$$\vec{p}_H(t) = \vec{p}_H(0) = \vec{p}, \qquad \vec{r}_H = \vec{r}_H(0) + \frac{t}{m}\vec{p}_H(0) = \vec{r}(0) + \frac{t}{m}\vec{p},$$

то јест, дисипатор нестаје у обе мастер једначине: $\mathcal{D}[x_H] = 0 = \mathcal{D}[p_H]$. Наиме, користећи Декартове координате, $k_x = k\sin\theta\cos\varphi\,, k_y = k\sin\theta\sin\varphi\,, k_z = k\cos\vartheta$, као и $d^2\overrightarrow{\Omega} = \sin\theta\, d\theta d\varphi$, лако следи $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} k_i\, d^2\overrightarrow{\Omega} = 0, \forall i = x, y, z$.

(б) Мастер једначина (3.14а) води адјунгованој мастер једначини:

$$\dot{A}_H = i[H, A_H] + 4\pi\gamma_1\left(\sigma_+ A_H(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+ \sigma_-, A_H(t)\}\right) + 4\pi\gamma_2\left(\sigma_- A_H(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_- \sigma_+, A_H(t)\}\right).$$

Нека је сопствени хамилтонијан облика: $H_S = \delta Z$. Тада важи: $Z_H(t) = e^{it\delta Z/h} Z e^{-it\delta Z/h} = Z, X_H(t) = \left(\cos\frac{\delta t}{h} + iZ\sin\frac{\delta t}{h}\right) X \left(\cos\frac{\delta t}{h} - iZ\sin\frac{\delta t}{h}\right) = X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}$, и $Y_H(t) = Y\cos\frac{2\delta t}{h} + X\sin\frac{2\delta t}{h}$. Такође су корисни изрази: $Z\sigma_\pm = -\sigma_\pm Z$ и $\sigma_-\sigma_+ = \frac{1}{2}(I - Z), \sigma_+ \sigma_- = \frac{1}{2}(I + Z)$.

Отуда следи мастер једначина за $A_H = Z_H$:

$$\dot{Z}_H = 4\pi\gamma_1\left(\sigma_+ Z_H(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+ \sigma_-, Z_H(t)\}\right) + 4\pi\gamma_2\left(\sigma_- Z_H(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_- \sigma_+, Z_H(t)\}\right) = -8\pi\gamma_1\sigma_+ \sigma_- Z - 8\pi\gamma_2\sigma_- \sigma_+ Z = -8\pi\gamma_1\frac{1}{2}(I + Z)Z - 8\pi\gamma_2\frac{1}{2}(I - Z)Z = -4\pi(\gamma_1 + \gamma_2)Z - 4\pi(\gamma_1 - \gamma_2).$$

што за почетни услов $Z_H(0) = Z(0) \equiv Z$ даје решење: $Z_H(t) = \left(Z(0) + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) e^{-4\pi(\gamma_1+\gamma_2)t} - \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$. Одавде је очигледно да за асимптотско решење важи: $\lim_{t\to\infty} Z_H(t) = -\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$, што (интеракционој слици) следи из израза (3.14ђ), као и за апсолутну нулу из израза (3.9б).

За $A_H = X_H$, адјунгована мастер једначина гласи:

$\dot{X}_H(t) = i[H, X_H(t)] + 4\pi\gamma_1\left(\sigma_+ X_H(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+ \sigma_-, X_H(t)\}\right) +$
$4\pi\gamma_2\left(\sigma_- X_H(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_- \sigma_+, X_H(t)\}\right) = -2\delta Y_H + 4\pi\gamma_1\left(\sigma_+\left(X\cos\frac{2\delta t}{h} -\right.\right.$
$\left.Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\sigma_- - \frac{1}{2}\left\{\sigma_+ \sigma_-, \left(X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\right\}\Big) + 4\pi\gamma_2\left(\sigma_-\left(X\cos\frac{2\delta t}{h} -\right.\right.$
$\left.Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\sigma_+ - \frac{1}{2}\left\{\sigma_- \sigma_+, \left(X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\right\}\Big).$

Рутински рачун даје: $\sigma_+\left(X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\sigma_- = 0 = \sigma_-\left(X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\sigma_+$, $\left\{\sigma_- \sigma_+, \left(X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\right\} = X_H(t) = \left\{\sigma_+ \sigma_-, \left(X\cos\frac{2\delta t}{h} - Y\sin\frac{2\delta t}{h}\right)\right\}$, што сменом у горњи израз, после сређивања, даје једначину:

$\dot{X}_H = -2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)X_H(t) - 2\delta Y_H.$

Аналогно следи једначина за $Y_H(t)$:

$\dot{Y}_H = 2\delta X_H - 2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)Y_H(t).$

Применом матричног поступка добијају се следећа решења:

$X_H(t) = Xe^{-2\pi(\gamma_1+\gamma_2)t}\cos 2\delta t - Ye^{-2\pi(\gamma_1+\gamma_2)t}\sin 2\delta t,$

$Y_H(t) = Ye^{-2\pi(\gamma_1+\gamma_2)t}\cos 2\delta t + Xe^{-2\pi(\gamma_1+\gamma_2)t}\sin 2\delta t.$

3.24 Решити мастер једначину:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\gamma(t)(Z\rho Z - \rho) \qquad (3.24a)$$

уз услов: $\gamma(t) = 2\gamma\frac{1-\gamma t}{e^{\gamma t}-2\gamma t}, \gamma > 0$. Испитати да ли се ради о потпуно позитивном и растављивом пресликавању. Испитати Марковљевост динамике.

Решење: Репрезентовањем у базису својственом за Z-Паулијев оператор очигледно важи:

$\frac{d\rho_{ii}}{dt} = 0,$

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = -\gamma(t)\rho_{ij}, \quad (3.24б)$$

$i \neq j = 0{,}1$. Отуда тривијално следе решења: $\rho_{ii}(t) = \rho_{ii}(0)$, $\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}(0)e^{-\int_0^t dt'\gamma(t')} \equiv \rho_{ij}(0)e^{-\Gamma(t)}$.

Да бисмо израчунали $\Gamma(t) = \int_0^t dt'\gamma(t')$, згодно је прво преписати $\gamma(t)$ у другачији облик:

$$\gamma(t) == -\frac{e^{-\gamma t}(-2\gamma+2\gamma^2 t)}{1-2\gamma t e^{-\gamma t}}, \gamma = const. > 0, \quad (3.24в)$$

што сменом у интеграл даје:

$$\Gamma(t) = \int_0^t dt'\gamma(t') = -\int_0^t \frac{df(t')}{f(t')}, \quad (3.24г)$$

где је $f(t) = 1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}$. Из (3.24г) одмах следи:

$$\Gamma(t) = -ln(1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}). \quad (3.24д)$$

Тако решење мастер једначине гласи:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{01}(0)(1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}) \\ \rho_{10}(0)(1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.24ђ)$$

Стављајући: $\rho_{11}(0) = \frac{1+n_z}{2}, \rho_{00}(0) = \frac{1-n_z}{2}$, $\rho_{01}(0) = \frac{n_-}{2} = \frac{n_+^*}{2}$, једначина за репрезентациону матрицу динамике (у четвородимензионалној репрезентацији) гласи:

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} \frac{1+n_z}{2} \\ \frac{n_-}{2} \\ \frac{n_+}{2} \\ \frac{1-n_z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+n_z}{2} \\ \frac{n_-}{2}(1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}) \\ \frac{n_+}{2}(1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}) \\ \frac{1-n_z}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.24е)$$

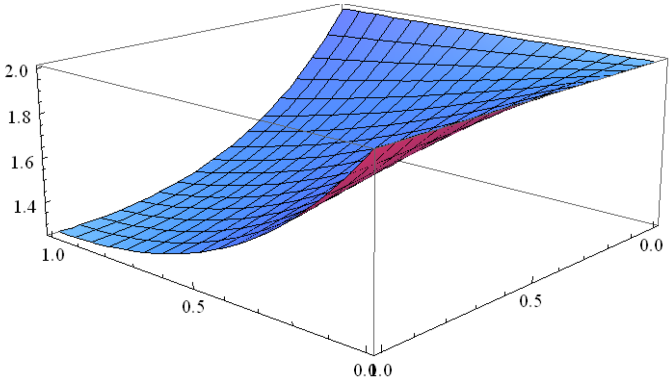
одакле очигледно следи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\gamma t e^{-\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\gamma t e^{-\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.24ж)$$

Динамичка матрица је зато облика:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - 2\gamma t e^{-\gamma t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - 2\gamma t e^{-\gamma t} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.24з)$$

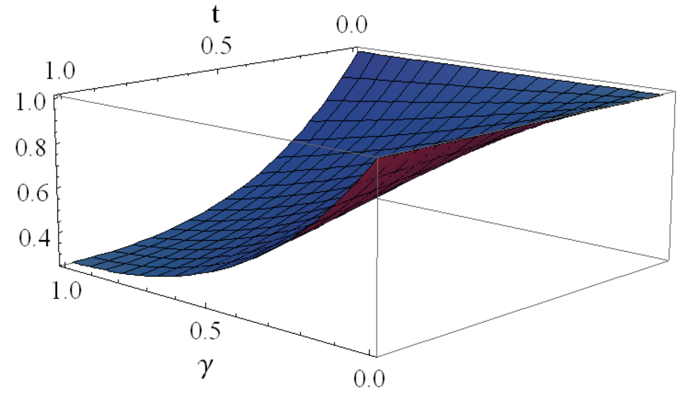
чије су својствене вредности ненегативне: $0,0,2e^{-\gamma t}(e^{\gamma t} - \gamma t),2e^{-\gamma t}\gamma t$, а трећа је дата Сликом 3.7, који то и потврђује.



Слика 3.7. Трећа својствена вредност динамичке матрице (3.24з), $\gamma \in [0,1], t \in [0,1]$.

Дакле, динамика описана мастер једначином је потпуно позитивна.

Са друге стране, матрица процеса има само позитивне својствене вредности (све су на дијагонали), што потврђује график испод, за $1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}$,



Слика 3.8. Својствена вредност матрице процеса , израз (3.24ж), $\gamma \in [0,1], t \in [0,1]$.

што сведочи о постојању инверзне матрице (инверзног пресликавања):

$$A_{inv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2e^{-\mathrm{\gamma t}}\mathrm{\gamma t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-2e^{-\mathrm{\gamma t}}\mathrm{\gamma t}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.24и}$$

Тако динамика за произвољна два тренутка (t,s) има матричну репрезентацију:

$$A(t,s) = A(t)A_{inv}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2e^{-t\gamma}t\gamma}{1-2e^{-s\gamma}s\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2e^{-t\gamma}t\gamma}{1-2e^{-s\gamma}s\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.24j}$$

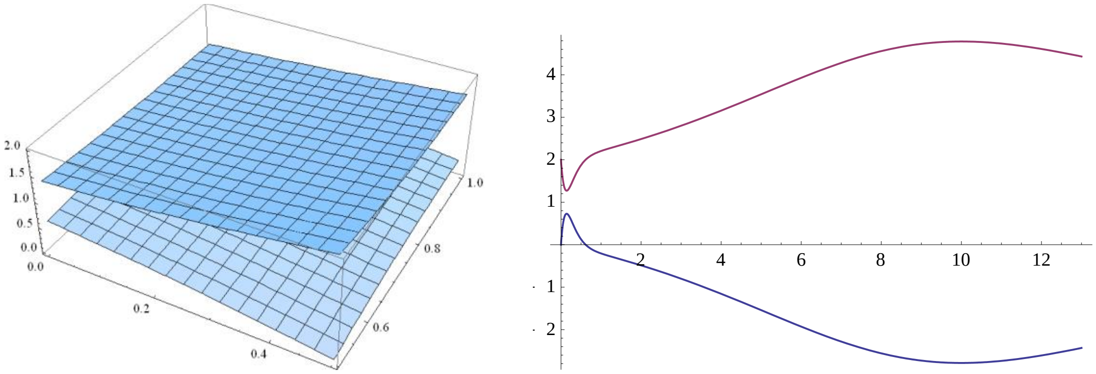
Коначно, да би разматрана динамика, поред потпуне позитивности, била Марковљевог типа, морала би динамика за произвољне тренутке (укључујући и инфинитезимално различите) да и сама буде потпуно позитивна. То јест, морало би да динамичка матрица за ненулти почетни тренутак буде са ненегативним својственим вредностима. Сходно (3.24j), динамичка матрица за произвољне тренутке има облик:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1-2e^{-t\gamma}t\gamma}{1-2e^{-s\gamma}s\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-2e^{-t\gamma}t\gamma}{1-2e^{-s\gamma}s\gamma} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.24к}$$

њене својствене вредности гласе:

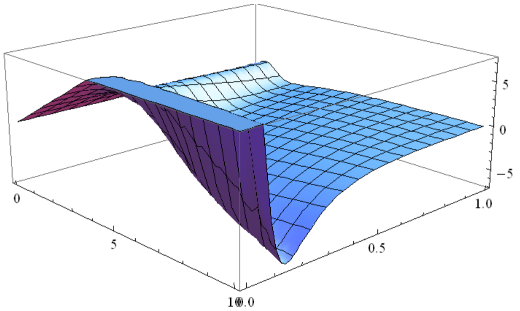
$$0,0,-\frac{2e^{-t\gamma}(e^{t\gamma}s-e^{s\gamma}t)\gamma}{e^{s\gamma}-2s\gamma},\frac{2e^{-t\gamma}(e^{s\gamma+t\gamma}-e^{t\gamma}s\gamma-e^{s\gamma}t\gamma)}{e^{s\gamma}-2s\gamma}. \tag{3.24л}$$

У зависности од избора s, t, γ, динамика (од ненултог почетног тренутка) даје *различите резултате*. На Слици 3.9 лево се види да се може учинити да је потпуно позитивна (све својствене вредности ненегативне). Али зато график десно показује неПП динамике за ненулти почетни тренутак за други избор параметара.



Слика 3.9. Својствене вредности дате изразом (3.24л): (лево) $\gamma = 1, s \in [0,1/2], t \in [1.01,2.1]$, (десно) $s = 0.1, t = 0.7, \gamma \in [0,13]$.

Отуда разматрана динамика *није Марковљева*. Наравно, ово је било јасно из облика мастер једначине: мастер једначина није Линдбладовог облика (који једини важи за Марковљеве процесе), јер $\gamma(t)$ *узима негативне вредности* за неке временске тренутке, као што потврђује Слика 3.10.



Слика 3.10. Графички приказ функције пригушења $\gamma(t)$, $\gamma \in [0,10], t \in [0,1]$.

НАПОМЕНА: A. A. Budini, Phys. Rev. A **97**, 052133 (2018)

3.25 Изучити динамику задату у Краусовом облику:

$$\rho(t) = \sum_k p_k(t)\, \sigma_k \rho \sigma_k, \tag{3.25a}$$

где је $\sigma_0 = I$, и Паулијева векторска опсервабла $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, док су вероватноће задате изразима ($\gamma > 0$):

$$p_0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-\gamma t}(1 - 2\gamma t), p_1 = \frac{1}{4}(1 - e^{-\gamma t}), p_2 = 0, p_3 = \frac{\gamma t}{2}e^{-\gamma t}$$

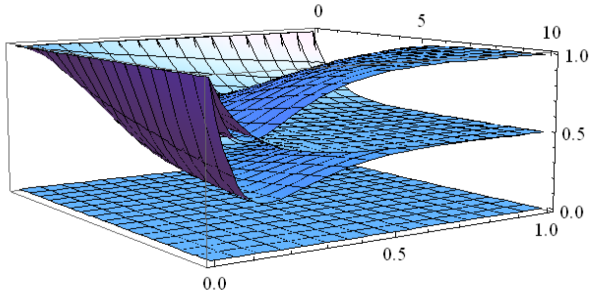
Решење: Ако је почетно стање задато у стандардном облику преко Блоховог вектора, коначно стање се непосредно добија из (3.25а), па отуда и једначина за репрезентациону матрицу (у четвородимензионалној репрезентацији):

$$A\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+n_z\\ n_-\\ n_+\\ 1-n_z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+n_z(p_0-p_1-p_2+p_3))\\ \frac{1}{2}n_+(p_1-p_2)+\frac{1}{2}n_-(p_0-p_3)\\ \frac{1}{2}n_-(p_1-p_2)+\frac{1}{2}n_+(p_0-p_3)\\ \frac{1}{2}(1+n_z(-p_0+p_1+p_2-p_3))\end{pmatrix}. \qquad (3.25б)$$

Решење се лако налази да гласи:

$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+p_0-p_1-p_2+p_3) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-p_0+p_1+p_2-p_3)\\ 0 & p_0-p_3 & p_1-p_2 & 0\\ 0 & p_1-p_2 & p_0-p_3 & 0\\ \frac{1}{2}(1-p_0+p_1+p_2-p_3) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+p_0-p_1-p_2+p_3)\end{pmatrix}, (3.25в)$$

чије су све својствене вредности, $1, \frac{1}{2}(1+e^{-t\gamma}), \frac{1}{2}e^{-t\gamma}(1+e^{t\gamma}-2t\gamma), 1-e^{-t\gamma}t\gamma$, графички представљене на Слици 3.11:



Слика 3.11. Својствене вредности матрице процеса (3.25в), $\gamma \in [0,1], t \in [1,10]$.

одакле се види да су све позитивне, па отуда постоји и инверзна матрица, која има облик:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p_0-p_1-p_2+p_3}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2(p_0-p_1-p_2+p_3)} \\ 0 & \frac{p_0-p_3}{(p_0+p_1-p_2-p_3)(p_0-p_1+p_2-p_3)} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_0+p_1-p_2-p_3}+\frac{1}{-p_0+p_1-p_2+p_3}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_0+p_1-p_2-p_3}+\frac{1}{-p_0+p_1-p_2+p_3}\right) & \frac{p_0-p_3}{(p_0+p_1-p_2-p_3)(p_0-p_1+p_2-p_3)} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2(p_0-p_1-p_2+p_3)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p_0-p_1-p_2+p_3}\right) \end{pmatrix}$$

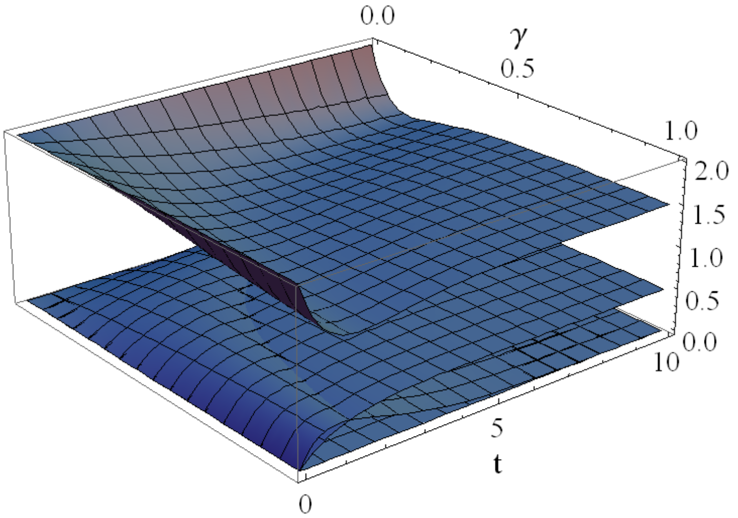
(3.25г)

Динамичка матрица следи из (3.25в):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+p_0-p_1-p_2+p_3) & 0 & 0 & p_0-p_3 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-p_0+p_1+p_2-p_3) & p_1-p_2 & 0 \\ 0 & p_1-p_2 & \frac{1}{2}(1-p_0+p_1+p_2-p_3) & 0 \\ p_0-p_3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+p_0-p_1-p_2+p_3) \end{pmatrix}$$

(3.25д)

са својственим вредностима, $0, \frac{1}{2}(1-e^{-t\gamma}), e^{-t\gamma}t\gamma, \frac{1}{2}e^{-t\gamma}(1+3e^{t\gamma}-2t\gamma)$, чија је ненегативност потврђена Сликом 3.12.



Слика 3.12. Својствене вредности динамичке матрице (3.25д), $\gamma \in [0,1], t \in [1,10]$.

То потврђује да је динамика потпуно позитивна – што је, наравно, очигледно с обзиром на постојање Краусовог записа (3.25а).

Из горе датих израза за репрезентациону и њој инверзну матрицу, њиховим множењем следи репрезентациона матрица за ненулти почетни тренутак, па одатле њој придружена динамичка матрица, чије су својствене вредности:

$$\frac{e^{-t\gamma}(e^{(s+t)\gamma}(2-4s\gamma)+e^{(2s+t)\gamma}(2-s\gamma)+e^{t\gamma}s\gamma(-1+2s\gamma)+e^{2s\gamma}(-2+4s\gamma)+e^{3s\gamma}(-2+t\gamma)-e^{s\gamma}\gamma(t+2s(-1+s\gamma)))}{2(1+e^{s\gamma})(1+e^{s\gamma}-2s\gamma)(e^{s\gamma}-s\gamma)},$$

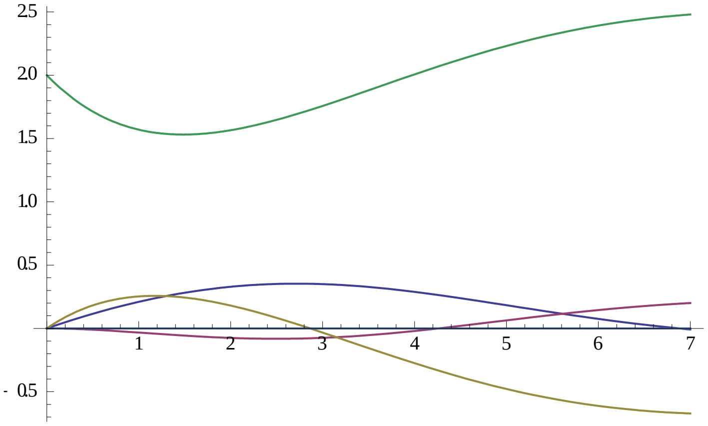
$$\frac{e^{-t\gamma}\gamma(2e^{2s\gamma}s-2e^{(s+t)\gamma}s+e^{(2s+t)\gamma}s-e^{3s\gamma}t+e^{t\gamma}s(-1+2s\gamma)+e^{s\gamma}(t-2s^2\gamma))}{2(1+e^{s\gamma})(1+e^{s\gamma}-2s\gamma)(e^{s\gamma}-s\gamma)},$$

$$\frac{e^{-t\gamma}\gamma(-3e^{(2s+t)\gamma}s+3e^{3s\gamma}t+e^{t\gamma}s(-1+2s\gamma)+2e^{(s+t)\gamma}s(-1+2s\gamma)+e^{s\gamma}(t+2s^2\gamma-4st\gamma)-2e^{2s\gamma}(s-2t+2st\gamma))}{2(1+e^{s\gamma})(1+e^{s\gamma}-2s\gamma)(e^{s\gamma}-s\gamma)},$$

$$\frac{1}{2(1+e^{s\gamma})(1+e^{s\gamma}-2s\gamma)(e^{s\gamma}-s\gamma)}e^{-t\gamma}(4e^{(3s+t)\gamma}+e^{(2s+t)\gamma}(6-9s\gamma)+e^{t\gamma}s\gamma(-1+2s\gamma)+e^{3s\gamma}(2-3t\gamma)+$$
$$e^{s\gamma}\gamma(-2s-t+2s(s+2t)\gamma)+e^{2s\gamma}(2-4(s+t)\gamma+4st\gamma^2)+e^{(s+t)\gamma}(2+4s\gamma(-2+s\gamma)))\text{(3.25ђ)}$$

,

Поучени искуством претходног задатка, бирамо вредности: $s = 0.2, t = 0.7$, и графички представљамо својствене вредности као функције позитивне константе γ:



Слика 3.13. Својствене вредности (3.25ђ), за $s = 0.2, t = 0.7, \gamma \in [0,7]$.

што јасно указује да динамичка матрица пресликавања за ненулти почетни тренутак није ПП, па отуда и коначан закључак да динамика није Марковљева.

НАПОМЕНА: Овде изучено динамичко пресликавање је пример „стохастичких унитарних динамика“ (A. A. Budini, Phys. Rev. A **97**, 052133 (2018)), које су увек униталне динамике (која сачувавају идентични оператор, тј., потпуно „деполаризовано“ стање), а која јесте, нужно, потпуно позитивна, али *у овом* случају није и Марковљева. Отворено је питање да ли се свака унитална динамика може записати у овом виду, тј., у виду „стохастичке унитарне динамике“ (назив потиче од вероватноће која се придружује једном унитарном Краусовом оператору). Заједничко овде разматраном пресликавању и динамици задатој у претходном задатку је то што су исте врсте, као и обе ПП, али не и Марковљеве. Динамика представљена у претходном задатку се још назива и *максимално немарковљевом*, јер за фактор пригушења важи $\lim_{t\to\infty}\Gamma(t) = -ln(1 - 2\gamma t e^{-\gamma t}) = 0$, тј., систем се асимптотски враћа у почетно стање.

3.26 За двонивоски атом (кубит) задато је пресликавање стања:

$$\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}|f(t)|^2\rho_{11} & f(t)\rho_{12}\\ f^*(t)\rho_{21} & (1-|f(t)|^2)\rho_{11}+\rho_{22}\end{pmatrix}, \qquad (3.26а)$$

где се ρ_{11} тиче побуђеног стања (што је „попуњеност“ побуђеног нивоа), уз почетни услов $|f(0)|^2 = 1$. Проверити инвертибилност и ПП овог пресликавања, а онда извести мастер једначину за овај процес. Која врста динамике, тј., динамичког пресликавања, је у питању?

Решење: Вероватно је очигледно да је матрични запис пресликавања дат матрицом:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}|f(t)|^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{f(t)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{f^*(t)} & 0\\ 1-|f(t)|^2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (3.26б)$$

Њене својствене вредности су 1, f, f^*, $|f(t)|^2$. Осим када је $\mathrm{f(t)} = 0$, све својствене вредности су ненулте.

Динамичка матрица следи из (3.26б):

$$\begin{pmatrix}|f(t)|^2 & 0 & 0 & \mathrm{f(t)}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-|f(t)|^2 & 0\\ \mathrm{f^*(t)} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (3.26б)$$

И има следеће својствене вредности: $0,1-|f|^2, 1+|f|^2$. То јест, пресликавање је ПП *акко* $1-|f|^2 \geq 0$.

Извођење мастер једначине започиње узимањем извода по времену стања:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} |f(t)|^2\rho_{11} & f(t)\rho_{12} \\ f^*(t)\rho_{21} & (1-|f(t)|^2)\rho_{11}+\rho_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}|f(t)|^2\rho_{11} & \dot{f}(t)\rho_{12} \\ \dot{f}^*(t)\rho_{21} & \frac{d}{dt}\left((1-|f(t)|^2)\rho_{11}+\rho_{22}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}|f(t)|^2\right)\rho_{11} & \dot{f}(t)\rho_{12} \\ \dot{f}^*(t)\rho_{21} & \left(-\frac{d}{dt}|f(t)|^2\right)\rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.26г}$$

Како важи: $\frac{d}{dt}|f(t)|^2 = 2|f(t)|\frac{d}{dt}|f(t)| = 2|f(t)|\frac{d}{dt}\sqrt{(Re\, f)^2+(Im\, f)^2} = 2|f|\frac{1}{2|f|}\frac{d}{dt}((Re\, f)^2+(Im\, f)^2) = 2Re\, f\cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f \cdot Im\, \dot{f}$, добија се:

$$\frac{d\rho}{dt} = \begin{pmatrix} \left(2Re\, f\cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f\cdot Im\, \dot{f}\right)\rho_{11} & \dot{f}\rho_{12} \\ \dot{f}^*\rho_{21} & -\left(2Re\, f\cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f\cdot Im\, \dot{f}\right)\rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.26д}$$

Претпоставимо да су испуњени горњи услови, $\mathrm{f(t)} \neq 0$ и $1-|f|^2 \geq 0$ за сваки тренутак времена. Први услов води постојању инверзног пресликавања, па отуда постоји мастер једначина која је локална у времену. Други услов успоставља ПП разматраног процеса. Приде, претпоставимо да је тражена мастер једначина Линдбладовог (тј., Марковљевог) облика. Истовремено усвајамо да би морало доћи до спонтане емисије фотона од стране атома, па очекујемо да ће, макар један, Линдбладов оператор бити оператор снижења, σ_-, за који знамо: $\sigma_-|1\rangle = |0\rangle$, ако је $|1\rangle$ побуђено стање. Свеукупно, претпоставимо да би један члан у дисипатору могао бити следећег облика:

$$\gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}(\sigma_+\sigma_-\rho(t)+\rho(t)\sigma_+\sigma_-)\right). \tag{3.26ђ}$$

У општем случају очекујемо појављивање Лембовог померaја у комутаторском делу мастер једначине и радимо у интеракционој слици. Уведимо сопствени хамилтонијан $H = \delta Z$. Тада једина линеарна комбинација Паулијевих матрица која комутира са H јесте комбинација идентичне матрице I и Паулијеве матрице Z. Како имамо члан $\sigma_+\sigma_- = (I + Z)/2$ у дисипатору, пробајмо са тим чланом као Лембовим померајем, у облику $s(t)\sigma_+\sigma_-$, тј., размотримо комутаторски члан у облику:

$$-\frac{i}{h}s(t)[\sigma_+\sigma_-, \rho(t)]. \tag{3.26е}$$

Тиме је тражени генератор динамике, $\mathcal{L}(t)$, дефинисан деловањем на стање:

$$\mathcal{L}(t)[\rho(t)] = -\frac{i}{h}s(t)[\sigma_+\sigma_-, \rho(t)] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}(\sigma_+\sigma_-\rho(t) + \rho(t)\sigma_+\sigma_-)\right). \tag{3.26ж}$$

Расписани комутатор алгебарски сабран са антикомутатором у дисипатору ће дати:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma(t)\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho(t)\left(\frac{i}{h}s(t) + \frac{\gamma(t)}{2}\right) + \rho(t)\sigma_+\sigma_-\left(\frac{i}{h}s(t) - \frac{\gamma(t)}{2}\right). \tag{3.26з}$$

У Z –репрезентацији, матрично представљена д.с. једначине (3.26з) има облик:

$$\gamma(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mid f \mid^2\rho_{11}\end{pmatrix} - \left(\frac{i}{h}s(t) + \frac{\gamma(t)}{2}\right)\begin{pmatrix}\mid f \mid^2\rho_{11} & f\rho_{21}\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \left(\frac{i}{h}s(t) - \frac{\gamma(t)}{2}\right)\begin{pmatrix}\mid f \mid^2\rho_{11} & 0\\ \rho_{12}f^* & 0\end{pmatrix}, \tag{3.26и}$$

што би требало упоредити са горе добијеном матрицом:

$$\begin{pmatrix}\left(2Re\, f \cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f \cdot Im\, \dot{f}\right)\rho_{11} & \dot{f}\rho_{12}\\ \dot{f}^*\rho_{21} & -\left(2Re\, f \cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f \cdot Im\, \dot{f}\right)\rho_{11}\end{pmatrix}. \tag{3.26ј}$$

Изједначавањем матрица постаје јасно: да би наше почетне претпоставке могле да ваљају, морају важити једнакости:

$$\gamma(t)\ \ |f|^2 = -\left(2Re\, f \cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f \cdot Im\, \dot{f}\right), \tag{3.26к}$$

и

$$\left(\frac{i}{h}s(t) + \frac{\gamma(t)}{2}\right) f = -\dot{f}. \tag{3.26л}$$

Наравно, ако није могуће задовољити ове једнакости, мора се ићи даље у потрази за ваљаним обликом лиувилијана – чије постојање, подсетимо, није гарантовано.

Из прве једнакости следи:

$$\frac{\gamma(t)}{2} = -\frac{1}{|\,f\,|^2}\left(Re\, f \cdot Re\, \dot{f} + Im\, f \cdot Im\, \dot{f}\right). \tag{3.26љ}$$

Из друге следи:

$$\frac{i}{h}s(t) = -\frac{\dot{f}}{f} - \frac{\gamma(t)}{2}. \tag{3.26м}$$

Пишући: $f = a + ib$, следи $\dot{f} = \dot{a} + i\dot{b}$, па се може срачунати:

$$2Re\frac{\dot{f}}{f} = 2Re\frac{(\dot{a}+i\dot{b})(a-ib)}{|f|^2} = 2Re\frac{a\dot{a}+b\dot{b}+i(-b\dot{a}+a\dot{b})}{|f|^2} = 2\,\frac{a\dot{a}+b\dot{b}}{|f|^2} \equiv$$
$$\frac{2Re\, f \cdot Re\, \dot{f} + 2Im\, f \cdot Im\, \dot{f}}{|f|^2} = -\gamma(t). \tag{3.26н}$$

Отуда друга једнакост захтева:

$$\frac{i}{h}s(t) = -\frac{\dot{f}}{f} + Re\frac{\dot{f}}{f} = -iIm\frac{\dot{f}}{f}, \tag{3.26њ}$$

То јест, уз $h = 1$ у (3.26њ), $s(t) = -Im\frac{\dot{f}}{f}$. Тако је добијена мастер једначина:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{h}s(t)[\sigma_+\sigma_-, \rho(t)] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\left(\sigma_+\sigma_-\rho(t) + \rho(t)\sigma_+\sigma_-\rho(t)\right)\right), \tag{3.26о}$$

уз услове: $s(t) = -Im\frac{\dot{f}}{f}, \gamma(t) = -2Re\frac{\dot{f}}{f}$.

оређењем са Задатком 3.4, види се да је ово динамика пригушења амплитуде, са временски зависним параметрима и уз обрнут редослед базисних елемената као базиса репрезентације пресликавања у односу на онај коришћен у Задатку 3.4.

3.27 Показати да динамика разматрана у претходном задатку, у општем случају, није УДП, или не испуњава услов глаткости у времену.

Решење: Да би неко пресликавање било УДП, *мора да важи на целом* простору стања. То подразумева и да је могуће да попуњеност побуђеног нивоа буде једнака нули, што води $f = 0$ у почетном тренутку. Тада, иако је почетно стање физички добро дефинисано (основно стање атома) и матрично репрезентовано:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.27а}$$

пресликавање је репрезентовано матрицом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.27б}$$

која има својствене вредности 0 и 1. То јест, матрица није инвертибилна, а сходно Задатку 2.9, што подразумева глатку динамику, нема диференцијални облик, тј., мастер једначина није дозвољена (није дефинисана за $f = 0$). Ово се може видети и из мастер једначине (3.26о): када $f \to 0$, $s(t) \to \infty$ и $\gamma(t) \to \infty$. Физички, ово није изненађење – видети Задатак 3.9, у којем је показано да је ово стање стационарно за пригушење амплитуде.

Са друге стране, замислимо да је динамика таква да за неко друго почетно стање (тј., $f \neq 0$), коначно стање буде основно стање атома. Тада, после тог тренутка, мастер једначина (3.26о) више не важи, тј., у том тренутку више не важи претпоставка о „глаткој“ динамици у времену – штавише, у том тренутку се дешава скок, и за пресликавање, и за мастер једначину која отад надаље више не важи (пресликавање није диференцијабилно у том тренутку времена). Физички, ово би одговарало сценарију: систем креће из неког почетног стања и после неког временског интервала пређе у основно стање (атом се деекситира), које је стационарно и надаље нема динамике.

НАПОМЕНА: Иако је математички сложен, процес пригушења амплитуде је физички врло интуитиван: после деекситације, ако нема откуд да стигне побуђење (разматрана ситуација одговара апсолутној нули, в. и Задатак 3.11), атом ће вечно остати у основном стању. За даље суптилности формалне природе, посебно у оквирима заснивања теорије, видети[20]. Разматрања спроведена у овом и претходном задатку истичу предност формализма „квантних операција“ које нису ограничене захтевом за глаткошћу динамике. У тренутку за који мастер једначина није дефинисана започиње тривијална динамика, тј., Краусов оператор је (до на „фазу“) јединствен и једнак је идентичном оператору – ништа лакше за поимање и представљање, али не и у формализму мастер једначина и временски зависних динамичких пресликавања.

3.28 Израчунати фон Нојманову ентропију коначног стања за процес изучен у Задатку 3.1, за почетна стања дефинисана Блоховим векторима: (а) $\vec{n} = (0.1, 0.1, 0.9)$, (б) $\vec{n} = \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)$ и (в) $\vec{n} = (0, 0, -1)$.

Решење: Фон Нојманова ентропија дата је изразом (основа логаритма је 2):

$$S = -tr\big(\rho\, Log(\rho)\big), \tag{3.28а}$$

где је логаритам основе 2. Ако су својствене вредности стања ρ реални бројеви $a, 1-a$, тада лако следи да је израз за ентропију исти као и за Болцманову ентропију у статистичкој механици, као и за Шенонову ентропију у информатици:

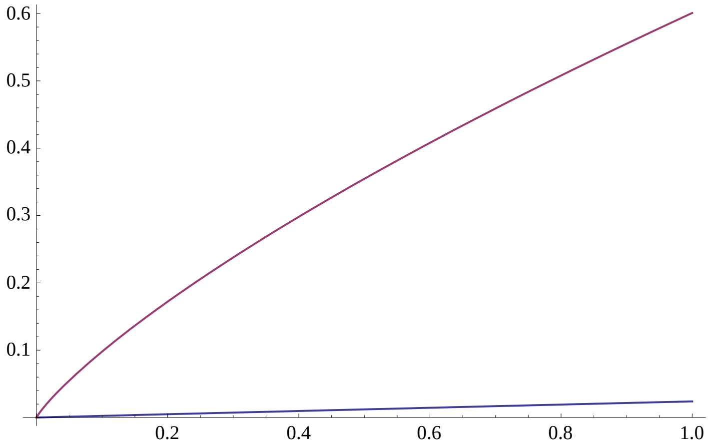
$$S = -aLog(a) - (1-a)Log(1-a). \tag{3.28б}$$

---

[20] D. Chruscinski et al, Phys. Rev. Lett. **121**, 080407 (2018).

У Задатку 3.1 је почетно стање било дато произвољном матрицом густине, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & n_- \\ n_+ & 1-n_z \end{pmatrix}$, а коначно стање матрицом $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & \sqrt{1-\lambda}n_- \\ \sqrt{1-\lambda}n_+ & (1-n_z) \end{pmatrix}$.

Својствене вредности за почетно стање су: $p_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{n_-n_+ + n_z^2}\right), \mathrm{p}_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{n_-n_+ + n_z^2})$, док су за коначно стање $q_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{n_-n_+ - \lambda n_-n_+ + n_z^2})$ и $q_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{n_-n_+ - \lambda n_-n_+ + n_z^2})$; $\lambda = 1 - \cos^2 \omega t \in [0,1]$. Промена ентропије, $\Delta S = S(t) - S(0) = p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 - q_1 \log_2 q_1 - q_2 \log_2 q_2$, представљена је графички за задата стања. Слика 3.14 показује пораст ентропије у функцији λ за два почетна стања, (а) и (б).



Слика 3.14. Промена ентропије, ΔS, у функцији $\lambda \in [0,1]$: (плаво) $\vec{n} = (0.1,0.1,0.9)$ са нормом $|\vec{n}| = \sqrt{0.83}$ што сведочи о почетном мешаном стању, (црвено) $\vec{n} = \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)$ са нормом $|\vec{n}| = 1$, што сведочи о почетном чистом стању.

Коначно, почетно чисто стање (в), које је својствено за Z -Паулијев-оператор за својствену вредност -1 и матрично је представљено у Z-репрезентацији, ово стање гласи: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. За ово почетно стање ентропија се не мења са временом, јер је стање стационарно за разматрани процес.

3.29 Поновити претходни задатак за процес уведен у Задатку 3.4.

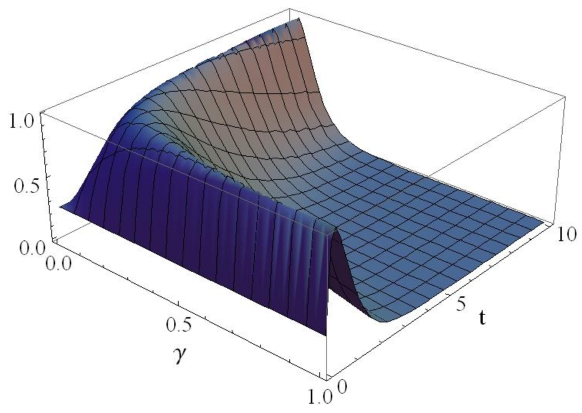
Решење: Поступак је идентичан поступку у претходном задатку, као и почетно стање. Коначно стање је дато матрицом густине (памтећи да је репрезентација $Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$):

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-n_z)+\frac{1}{2}(1-e^{-2t\gamma})(1+n_z) & \frac{1}{2}e^{-t\gamma}n_+ \\ \frac{1}{2}e^{-t\gamma}n_- & \frac{1}{2}e^{-2t\gamma}(1+n_z) \end{pmatrix}$, чије су својствене вредности (наравно, независне од репрезентације):

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm e^{-4t\gamma}\sqrt{e^{6t\gamma}n_-n_+ + e^{4t\gamma}(1-e^{2t\gamma}+n_z)^2}\right). \qquad (3.29a)$$

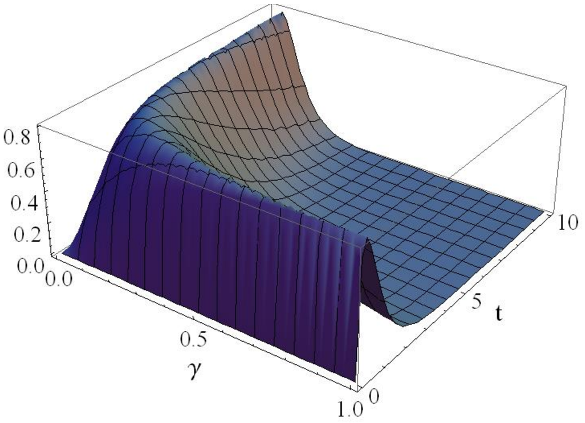
Свуда су одабрани интервали променљивих: $t \in [0{,}10]$, $\gamma \in [0{,}1]$.

(а) На слици испод приказана је ентропија коначног стања, која је у почетном тренутку (за почетно стање) приближно једнака 0.26. Осим за мало γ, ентропија временом опада и тежи нули – што је последица постојања стационарног стања (препознатог у Задатку 3.9) – видети и случај (в) ниже.



Слика 3.15. Ентропија коначног стања за почетно стање, случај (а). Водоравне осе: $t \in [0{,}10]$, $\gamma \in [0{,}1]$.

(б) Слика 3.16 показује промену ентропије за случај (б) почетног стања. Иако је почетно стање чисто, оно испрва постаје мешано, да би се убрзо „прочистило“ (тј., ентропија постаје нула), тј., прешло у стационарно стање.



Слика 3.16. Промена ентропије за почетно стање, случај (б).

(в) Стање је у сваком тренутку једнако почетном, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, јер оно представља стационарно (основно) стање препознато у Задатку 3.9 - отуда без промене ентропије.

3.30 Као у претходна два задатка, само за процес уведен у задатку 3.5.

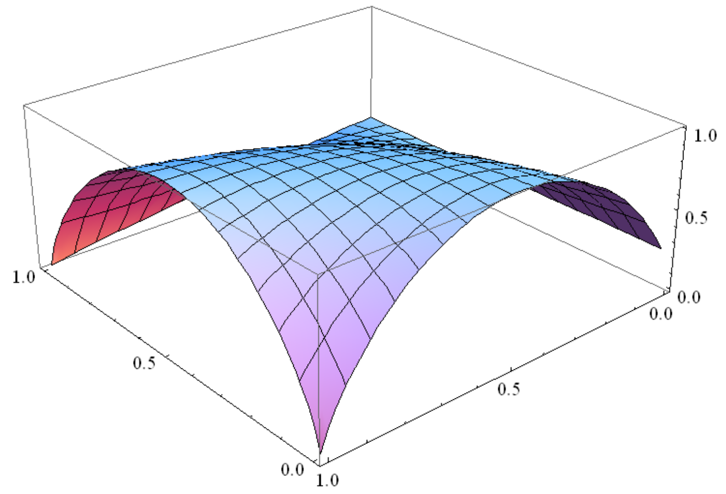
Решење: Коначно стање дато је матрицом, преузетом из Задатка 3.5:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1+2p)\gamma-(-1+\gamma)n_z & \sqrt{1-\gamma}n_- \\ \sqrt{1-\gamma}n_+ & 1+\gamma-2p\gamma+(-1+\gamma)n_z \end{pmatrix}, \quad (3.30а)$$

чије су својствене вредности дате изразима: $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{(1-\gamma)n_-n_+ + ((1-2p)\gamma-(1-\gamma)n_z)^2}\right)$. (3.30б)

Свуда је исти избор за вредности параметара, $p \in [0,1]$ и $\gamma \in [0,1]$. На свим графицима нумерисана доња оса се тиче вероватноће p. Вреди поновити (видети Задатак 3.8) да је за $p = 0$ овај процес заправо процес пригушења амплитуде, претходни задатак.

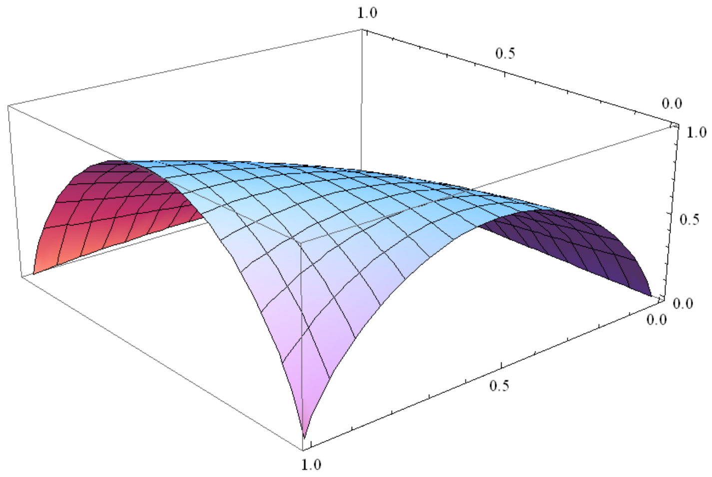
(а) Слика 3.17 испод даје ентропију коначног стања.



Слика 3.17. Ентропија коначног стања, случај (а). Водоравне осе: $p \in [0,1]$ и $\gamma \in [0,1]$.

На графику се јасно виде два стационарна, асимптотска, чиста стања – препозната за овај процес у Задатку 3.8: за $p = 0$ то је основно стање, док за $p = 1$ то је побуђено стање кубита. У оба случаја види се почетни пораст ентропије са временом за задато стање.

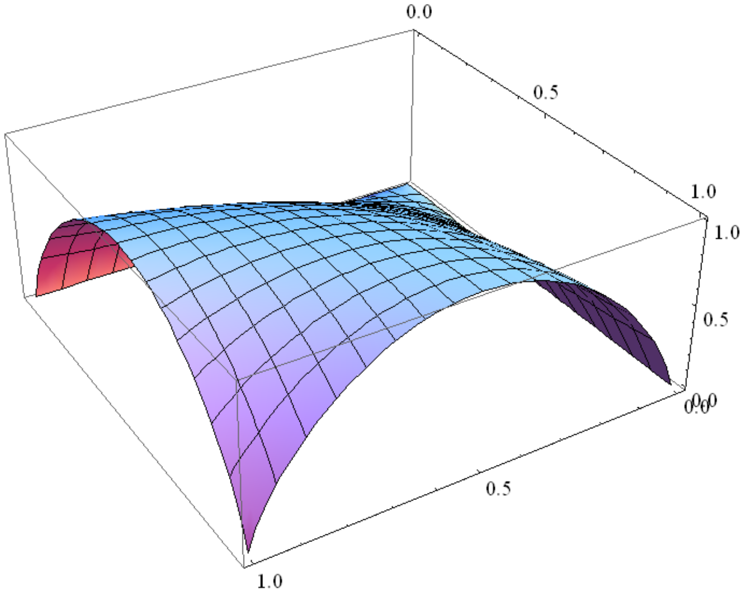
(б) резултат је представљен Сликом 3.18.



Слика 3.18. Ентропија коначног стања, случај (б). Водоравне осе: $p \in [0,1]$ и $\gamma \in [0,1]$.

Очекивано, и овде се виде два асимптотска чиста стања. За $p = 1$ прелаз у асимптотско побуђено стање је праћено монотоним опадањем ентропије.

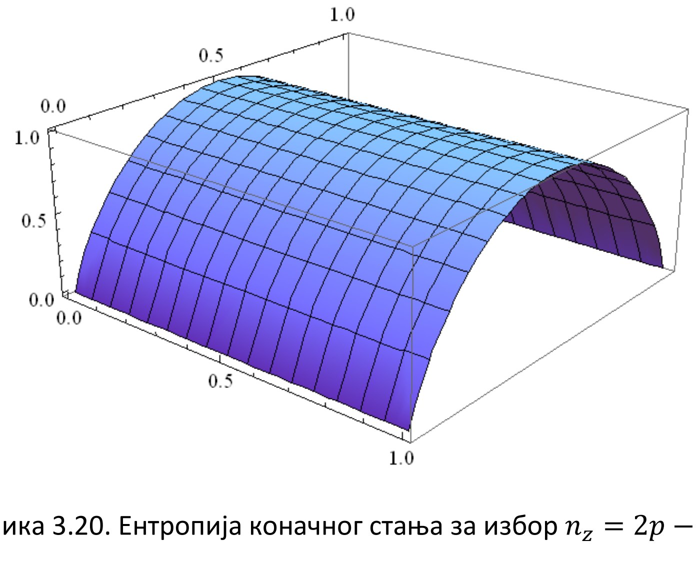
(в) резултат је представљен графиком испод:



Слика 3.19. Ентропија коначног стања, случај (в). Водоравне осе: $p \in [0,1]$ и $\gamma \in [0,1]$.

Почетно стање је основно стање и представља асимптотско стационарно стање за $p = 0$. Занимљиво је уочити: за $p = 1$ почетно основно стање прелази у коначно, стационарно, асимптотско побуђено стање.

Потпуности ради, представимо стационарност стања за овај процес. У ту сврху одаберимо (в. Задатак 3.8): $n_z = 2p - 1$. Сменом овог у (3.30б) следи Слика 3.20:



Слика 3.20. Ентропија коначног стања за избор $n_z = 2p - 1$. Водоравне осе: $p \in [0,1]$ и $\gamma \in [0,1]$.

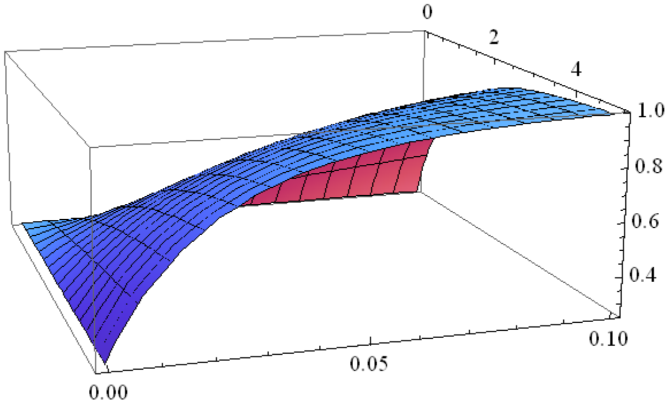
у којем, јасно, ни за једно p нема промене почетне вредности за ентропију.

3.31 Као у претходном задатку, али за пресликавање дефинисано у Задатку 3.6.

Решење: Како избор квантне слике не мења својствене вредности стања, ентропија је инваријантна на промену слике. Тако ћемо непосредно користити резултате Задатка 3.6.

Својствене вредности коначног стања гласе: $\frac{1}{2}(1 \pm e^{-8t\gamma}\sqrt{e^{16t\gamma+\frac{8t\gamma}{\Omega}}n_-n_+ + e^{8t\gamma}n_z^2})$, па

следи графички приказ фон Нојманове ентропије за $\Omega = -1,\ t \in [0{,}5], \gamma \in [0{,}0.1]$, за сва одабрана почетна стања:



Слика 3.21. Ентропија за произвољно почетно стање. Вредности параметара: $\Omega = -1\ t \in [0{,}5], \gamma \in [0{,}0.1]$.

што показује да разматрани процес временом увећава ентропију система.

3.32 Мастер једначина за пригушени хармонијски осцилатор гласи:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\omega_0[a^+a,\rho] + \gamma(N+1)\left(a\rho a^+ - \frac{1}{2}\{a^+a,\rho\}\right) + \gamma N\left(a^+\rho a - \frac{1}{2}\{aa^+,\rho\}\right), \tag{3.32a}$$

где је $N = (exp(\omega_0/k_BT) - 1)^{-1}$ средњи број бозона у једном моду фреквенције ω_0 са топлотним купатилом на температури T.

Извести израз за попуњеност нивоа, $P_n = \langle n|\rho|n\rangle$, у стационарном стању осцилатора.

Решење: Из мастер једначине непосредно следи једначина за матричне елементе статистичког оператора:

$$\left\langle n\left|\frac{d\rho}{dt}\right|n'\right\rangle = \frac{d\rho_{nn\prime}}{dt} = -i\omega_0\langle n|[a^+a,\rho]|n'\rangle + \gamma(N + 1)\left\langle n\left|\left(a\rho a^+ - \frac{1}{2}\{a^+a,\rho\}\right)\right|n'\right\rangle + \gamma N\left\langle n\left|\left(a^+\rho a - \frac{1}{2}\{aa^+,\rho\}\right)\right|n'\right\rangle. \tag{3.32б}$$

Коришћењем једнакости за Бозеове операторе, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, a^+a|n\rangle = n|n\rangle$, лако се добија систем једначина за матричне елементе статистичког оператора:

$$\frac{d\rho_{nn\prime}}{dt} = -i\omega_0(n-n')\rho_{nn\prime} + \gamma(N+1)\left(\sqrt{(n+1)(n'+1)}\rho_{n+1\,n'+1} - \frac{1}{2}(n+n')\rho_{nn\prime}\right) + \gamma N\left(\sqrt{nn'}\rho_{n-1\,n'-1} - \frac{1}{2}(2+n+n')\rho_{nn'}\right). \tag{3.32в}$$

Стационарно стање дефинисано је изразом $\frac{d\rho_{nn\prime}}{dt} = 0, \forall n, n'$, што за дијагоналне елементе, у већ усвојеним ознакама, гласи:

$$\gamma(N+1)\big((n+1)P_{n+1} - nP_n\big) + \gamma N(nP_{n-1} - (1+n)P_n) = 0. \tag{3.32г}$$

Како $n \in (0,1,2,3,\dots)$, овде се ради о бесконачном систему једначина. Зато, да би се решио систем – ако решења има – згодно је увести неке претпоставке[21]. За почетак, и с обзиром да се појављују само константни ненегативни множиоци, потражимо решење (3.32г) у облику рационалне функције, нпр., као количник два полинома:

$$P_n = \frac{f_n}{g_n}. \tag{3.32д}$$

---

[21] За алтернативни поступак видети у M. O. Sculy and M. Suhail Zubairy, “Quantum Optics”, Cambridge Univ. Press, 1997.

Услов нормирања, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{g_n} = 1$, сада указује да би следеће поједностављење могло бити погодно: $g_n = g, \forall n, \sum_{n=0}^{\infty} f_n = g$. Под претпоставком да је g коначно, следи да мора важити услов: $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Зато, као најједноставнију такву могућност, потражимо решење за f_n у облику:

$$f_n = f^n, f < 1, \tag{3.32ђ}$$

што одмах имплицира:

$$g = \frac{1}{1-f}. \tag{3.32е}$$

Сменом овога у горњу једначину за попуњености нивоа добија се, после сређивања, квадратна једначина:

$$(N+1)(n+1)f^2 - (2Nn + n + N)f + Nn = 0. \tag{3.32ж}$$

Лако се добијају два решења ове једначине:

$$\frac{n}{1+n}, \frac{N}{1+N}, \tag{3.32з}$$

од којих, наравно, само друго решење задовољава тражене услове, тј., да f не зависи од n, као и да је $f < 1$.

Тако је за стационарно стање пригушеног хармонијског осцилатора, број попуњености нивоа дат изразом:

$$P_n = \frac{1}{g}\left(\frac{N}{1+N}\right)^n = \frac{1}{(1+N)}\left(\frac{N}{1+N}\right)^n. \tag{3.32и}$$

Сменом, у поставци датог, израза за N, после сређивања, лако се добија:

$$P_n = \left(1 - exp(-\omega_0/k_B T)\right) exp(-n\,\omega_0/k_B T), \tag{3.32ј}$$

што је класична Болцманова расподела. Како је све рађено у енергијској репрезентацији, познат је и *израз за стационарно стање* квантног пригушеног осцилатора[22]:

$$\rho_{ss} = \left(1 - exp(-\omega_0/k_B T)\right)\sum_{n=0}^{\infty} exp(-n\,\omega_0/k_B T)\ |n\rangle\langle n|, \qquad (3.32к)$$

што одговара Гибсовом канонском стању (тј., ансамблу).

У лимесу $T \to 0$, стационарно стање постаје јединствено чисто стање:

$$\rho_{ss} = |0\rangle\langle 0|, \qquad (3.32л)$$

што је основно стање хармонијског осцилатора, у координатној репрезентацији: $\langle x|n = 0\rangle \equiv \varphi_0(x) = (m\omega/\pi h)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2h}$.

3.33 Најопштији облик мастер једначине за спин-бозон модел (потпуно позитивно пресликавање које сачувава траг) дат је изразом ($h = 1$)[23]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i(H_1\rho - \rho H_1^{+}) - B_{zz}\big[Z, [Z, \rho]\big] + B_{zy}Y\rho Z + B_{zy}^{*}Z\rho Y + B_{zx}X\rho Z + B_{zx}^{*}Z\rho X, \qquad (3.33а)$$

где је $H_1 = H_0 + B_{zx}Y - B_{zy}X$, $H_0 = -\frac{\Delta}{2}X + \frac{\epsilon}{2}Z$ је сопствени хамилтонијан спинског подсистема, и $B_{zi}, i = x, y, z$, су (временски зависни) интеграли двовременских корелационих функција, чији експлицитан облик овде није од значаја. Извести општи облик промене стања спинског система.

Решење: Хамилтонијан изолованог система „спин+топлотно купатило“ којег чине неинтерагујући бозони (или хармонијски осцилатори) је облика:

---

[22] Израз (3.32к) даје попуњеност нивоа ласера у линеарној апроксимацији, M. O. Sculy and M. Suhail Zubairy, “Quantum Optics”, Cambridge Univ. Press, 1997. Модел (3.32а) се тиче и једномодног ЕМ поља у квантној електродинамичкој шупљини.

[23] L. Ferialdi, Phys. Rev. A **95**, 020101 (2017).

$$H = H_0 + H_B + H_{int} = -\frac{\Delta}{2}X + \frac{\epsilon}{2}Z + \sum_i \omega_i\, a_i^+ a_i + \frac{k_0}{2} Z \otimes \sum_i c_i\,(a_i + a_i^+). \tag{3.33б}$$

Отуда је овај модел гаусијанског типа разматраног у Задатку 2.18, тј., најопштије динамичко пресликавање које је потпуно позитивно и сачувава траг стања је облика (2.18а). Извођење мастер једначине (3.33а) која је општег облика за све вредности параметара (температуре, јачине интеракције) је нетривијалан задатак (в. претходну фусноту).

Најопштији облик стања спинског (једнокубитног) система дат је изразом:

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(I + c_i(t)\sigma_i), \tag{3.33в}$$

где се појављују Паулијеви σ-оператори и подразумева сабирање по поновљеном индексу. Множењем са σ_j и узимањем трага обеју страна једначине следи:

$$\langle\sigma_j\rangle = \frac{c_i}{2} tr\big(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\big), \tag{3.33г}$$

тј.,

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(I + \langle\sigma_i(t)\rangle\sigma_i). \tag{3.33д}$$

Тако је довољно знати $\langle\sigma_i(t)\rangle, i = x, y, z$, да би стање отвореног система било једнозначно познато у сваком тренутку.

Множењем (3.33а) са σ_j и узимањем трага следе диференцијалне једначине за $\langle\sigma_i(t)\rangle$. То јест:

$$\frac{d\langle\sigma_j\rangle}{dt} = tr\left(\sigma_j \frac{d\rho}{dt}\right) = tr\big[\sigma_j\big(-i(H_1\rho - \rho H_1^+) - B_{zz}\big[Z,[Z,\rho]\big] + B_{zy}Y\rho Z + B_{zy}^* Z\rho Y + B_{zx}X\rho Z + B_{zx}^* Z\rho X\big)\big]. \tag{3.33ђ}$$

Како се у (3.33а) појављују Паулијеви оператори у експлицитном облику, уместо општег рачуна, ево израза за $\langle Z\rangle$:

$$\frac{d\langle Z\rangle}{dt} = tr\big[Z\big(-i(H_1\rho - \rho H_1^{+}) - B_{zz}\big[Z,[Z,\rho]\big] + B_{zy}Y\rho Z + B^*_{zy}Z\rho Y + B_{zx}X\rho Z +$$
$$B^*_{zx}Z\rho X\big)\big] = -itr\bigg(Z\bigg(-\frac{\Delta}{2}X + \frac{\epsilon}{2}Z + B_{zx}Y - B_{zy}X\bigg)\rho - \rho\bigg(-\frac{\Delta}{2}X + \frac{\epsilon}{2}Z + B^*_{zx}Y -$$
$$B^*_{zy}X\bigg)Z\bigg) + tr\big(B_{zy}ZY\rho Z + B^*_{zy}ZZ\rho Y + B_{zx}ZX\rho Z + B^*_{zx}ZZ\rho X\big) =$$
$$-itr\bigg(\bigg(\frac{\Delta}{2}[X,Z] + B_{zx}ZY - B_{zy}ZX - B^*_{zx}YZ + B^*_{zy}XZ\bigg)\rho\bigg) + \big(B_{zy} + B^*_{zy}\big)\langle Y\rangle +$$
$$(B_{zx} + B^*_{zx})\langle X\rangle = -\Delta\langle Y\rangle. \tag{3.33е}$$

На исти начин следе и остале једначине. Свеукупно:

$$\frac{d\langle\sigma_i\rangle}{dt} = \mathcal{B}_{ij}\langle\sigma_j\rangle + \mathcal{A}_i, \tag{3.33ж}$$

где су матрица и вектор:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -4B^{Re}_{zz} & -\epsilon & 4B^{Re}_{zx} \\ \epsilon & -4B^{Re}_{zz} & \Delta + 4B^{Re}_{zy} \\ 0 & -\Delta & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{A}^T = \big(-4B^{Im}_{zy}, 4B^{Im}_{zx}, 0\big). \tag{3.33з}$$

НАПОМЕНА: Општа решења (3.33з) нису позната, тј., позната су решења само за неке посебне случајеве. Први такав случај се тиче избора Δ= 0, када се модел своди на модел *чисте декохеренције* који представља двонивоски аналогон модела мерења положаја, обрађеног у Задатку 3.18, а који представља декохеренцијски лимес мастер једначине Калдеире и Легета, уведене у Задатку 2.16. То јест, тада се може показати да се (3.33а) своди на мастер једначину облика:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\frac{\epsilon}{2}[Z,\rho] - \frac{k_0}{4}D\big[Z,[Z,\rho]\big]. \tag{3.33и}$$

Други случај се тиче познатог *Џејнс-Камингсовог модела* у квантној оптици. Замена улога Паулијевих оператора Z и X у (3.33б), непосредно даје Џејнс-Камингсов модел, који се, пак, обично третира увођењем, тзв., *RWA*-за-хамилтонијан система. Проблеми које са собом доноси ова апроксимација дотакнути су у Задацима 4.1-4.3. Мастер једначина која се добија је облика разматраног (има их више, сличних) у Задацима 3.11-3.14. Трећи случај се тиче спин-бозон модела под претпоставком марковљевости динамике, који је предмет Задатка 3.6, и за који је мастер једначина облика[24]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\Delta[Z,\rho] + \gamma_{zz}(0)(Z\rho Z - \rho) + \frac{\gamma_{xx}(\omega_0)+\gamma_{yy}(\omega_0)}{2}(X\rho X + Y\rho Y - 2\rho). \tag{3.33j}$$

---

[24] M. Arsenijević et al, Braz. J. Phys. **47**, 339 (2017).

Проблеми са применом *RWA*-за-хамилтонијан се не појављују за оригинални спин-бозон систем, као што је наглашено у[25]. Методи које је развио Феријалди (фуснота 24) тичу се првог случаја, јер се тада види, у терминима теорије декохеренције, „опсервабла бројача“ (ако такве има) – ради поређења, видети[26].

3.34 Решити Паулијеву мастер једначину за тронивоски систем:

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum_{i,j\neq i}\left(w_{ij}P_j - w_{ji}P_i\right), \qquad (3.34а)$$

за попуњеност нивоа $P_i, i = 1,2,3$, ако су ненулте константе прелаза: $w_{21} \equiv w_{1\to 2} = 1 = w_{2\to 3} = w_{32}, w_{13} \equiv w_{3\to 1} = 0.1$.

Решење: Уз задате услове, систем једначина гласи:

$$\frac{dP_1}{dt} = w_{13}P_3 - w_{21}P_1 = 0.1P_3 - P_1,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = w_{21}P_1 - w_{32}P_2 = P_1 - P_2,$$

$$\frac{dP_3}{dt} = w_{32}P_2 - w_{13}P_3 = P_2 - 0.1P_3. \qquad (3.34б)$$

Како се ради о хомогеном систему једначина, примењујући матрични запис система једначина:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0.1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.1 \end{pmatrix}, \qquad (3.34в)$$

решење је облика:

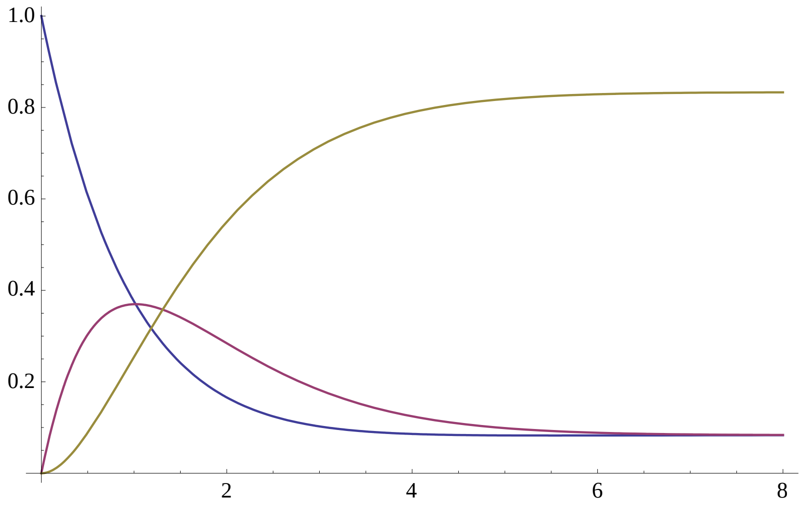
$$X = exp(\mathcal{M}t)X(0). \qquad (3.34г)$$

Изаберимо $X^T(0) = (1,0,0)$. Како је експлицитан запис експоненцијалне матрице и решења превелики, овде ћемо само дати графички представљена решења за сва три нивоа:

---

[25] A. J. Leggett et al, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).

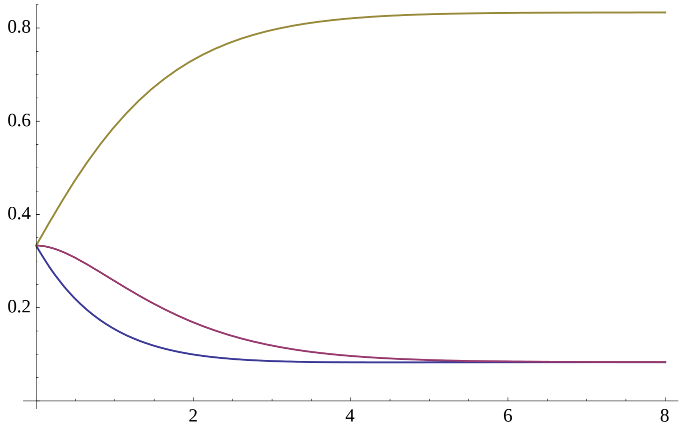
[26] M. Dugić, Physica Scripta **53**, 9 (1996); M. Dugić, Phys. Scripta **56**, 560 (1997).



Слика 3.22 Решења једначина (3.34б) за почетно стање $(1{,}0{,}0)$: плаво за ниво 1, црвено за ниво 2, а жуто за ниво 3.

где се: плаво тиче нивоа 1, црвено нивоа 2, а жуто нивоа 3.

За једнаку почетну попуњеност нивоа, $X^T(0) = (1/3{,}1/3{,}1/3)$, добија се резултат представљен Сликом 3.23.



Слика 3.23 Решења једначина (3.34б) за почетно стање $(1/3{,}1/3{,}1/3)$: плаво за ниво 1, црвено за ниво 2, а жуто за ниво 3.

НАПОМЕНА: Паулијева мастер једначина је полуфеноменолошки, полукласични опис инверзног попуњавања енергијских нивоа атома – што лежи у корену технологије ласера[27]. Одсуство вандијагоналних елемената јасно[28] истиче да Паулијева мастер

---

[27] Видети, нпр., одељак 11.1 у: M. O. Sculy and M. Suhail Zubairy, "Quantum Optics", Cambridge Univ. Press, 1997.

[28] М. Дугић, СФИН.

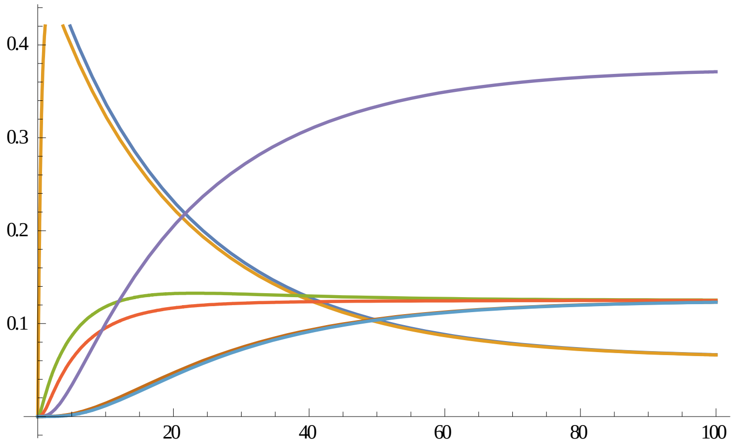
једначина описује динамику на временским скалама знатно дужим од времена декохеренције – које је потребно за приближно нестајање вандијагоналних чланова матрице густине, $\langle i|\rho|j\rangle \equiv \rho_{ij}$ – па су од интереса само дијагонални елементи, $\langle i|\rho|i\rangle \equiv P_i$.

3.35 Решити Паулијеву мастер једначину за 7-нивоски систем, где су нивои груписани у, тзв., „зоне“, (1,2), (3,4,5), (6,7), дефинисане константама прелаза датим у ознакама претходног задатка: $w_{12} = 1 = w_{21} = w_{34} = w_{43} = w_{67} = w_{76}, \quad w_{23} = 0.05, w_{32} = 0.1 = w_{45} = w_{65}, w_{54} = 0.3 = w_{56}$.

Решење: Поступком као у претходном задатку добија се матрица система диференцијалних једначина:

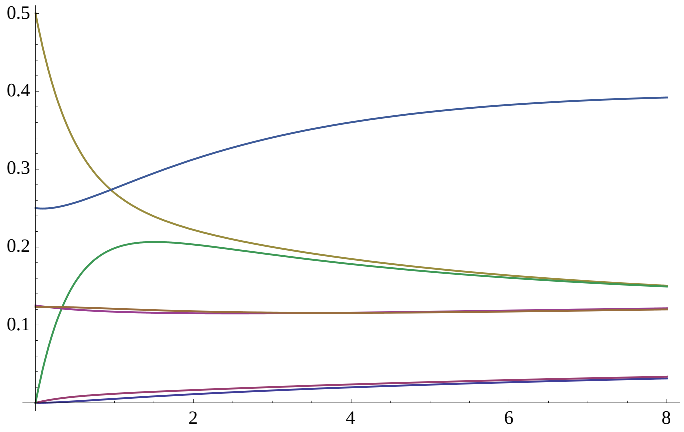
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.1 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1.05 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & -0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & -1.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.35a)$$

па су матрично рачуната решења за почетно стање $(1,0,0,0,0,0,0)$ графички представљена Сликом 3.24:



Слика 3.24 Попуњености нивоа за почетно стање $(1,0,0,0,0,0,0)$ које одсликавају „зонску структуру“, тј., груписање.

За почетно стање $(0,0,1/2,0,1/4,1/8,1/8)$ следи Слика 3.25:



Слика 3.25 Као и на слици 24, за почетно стање $(0{,}0{,}1/2{,}0{,}1/4{,}1/8{,}1/8)$. Квалитативно је резултат исти: груписање попуњености нивоа.

Уочљиво је груписање „асимптотских“ попуњености нивоа, у зависности од почетног стања. Због овог груписања, модел се назива „зонским“.

НАПОМЕНА: Разматрани модел је коришћен као семикласични модел рада асоцијативних неуронских мрежа, где су прелази са једног на други ниво остварени путем квантног тунеловања[30]. У Хопфилдовој теорији неуронских мрежа, јачине повезивања синапси се могу представити енергијским хиперповршима које, као и енергијске хиперповрши у адијабатском квантном опису вибрација молекула, имају локалне минимуме – локалне потенцијалне „јаме“. Зонска структура[29] подразумева груписане локалне потенцијалне јаме где су од интереса само основни енергијски нивои сваке јаме (рецимо, на апсолутној нули) – нпр., у (локалној, у близини дна минимума) апроксимацији хармонијског потенцијала за сваку јаму. Локално груписани минимуми (јаме) не морају бити истих дубина (енергија), па отуда и горе разматране неједнаке вредности за, нпр., w_{45} и w_{54}, као и за w_{56} и w_{65}. Попуњавање нивоа одређује меморијски садржај неуронске мреже. Наравно, и овде су унапред одстрањени недијагонални елементи статистичког оператора, као и у претходном задатку – због своје величине, неуронске мреже би требало да представљају декохериране квантне системе, чија динамика се одвија на временским скалама много дужим од времена декохеренције. При томе, процес квантног тунеловања (између већ декохерираних стања) може бити упоредив[30] са брзином одвијања процеса декохеренције па као квантни процес није избачен из разматрања.

---

[29] M. Dugić, D. Raković, Europ. Phys. J. B **13**, 781 (2000).

[30] U. Satya Saindah et al, Nature **568**, 75 (2019).

3.36 Доказати да за двонивоски систем уведен у Задатку 3.11 постоји асимптотско стационарно стање (АСС) и да је оно топлотно равнотежно Гибсово „канонско“ стање.

Решење: Двонивоски систем (нпр., атом) описан је мастер једначином (3.11б-г). Та једначина описује хомогени Марковљев процес те испуњава *опште* услове да има једнозначно стационарно стање које је уједно и АСС – видети одељак 4.4 у [2]. Дакле, за разлику од процеса изучаваних у, нпр., Задацима 3.8, 3.19 и 3.20 (интеракциона слика), овде разматрани модел има једнозначно стационарно стање које је уједно и лимес динамике за „бесконачно“ дуго време – физички се ради о термализацији система на температуру окружења. У овом задатку ће то бити експлицитно показано, без позивања на општи теоријски резултат.

Мастер једначина (интеракциона слика, уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја) гласи:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma_0 n(\omega)\left(\sigma_+ \rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_- \sigma_+ , \rho\}\right) + \gamma_0\big(1 + n(\omega)\big)\left(\sigma_- \rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+ \sigma_- , \rho\}\right), \tag{3.36а}$$

где је $n(\omega)$ средњи број фотона фреквенције ω, са окружењем којег чини ЕМ поље на температури T:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{h\omega/k_B T} - 1}. \tag{3.36б}$$

Сопствени хамилтонијан отвореног система је облика:

$$H_S = \frac{\omega}{2} Z, \tag{3.36в}$$

па је канонско Гибсово стање (уз: $h = 1, \beta \equiv \frac{1}{k_B T}, Z|0\rangle = -|0\rangle, Z|1\rangle = |1\rangle$) у својој спектралној форми дато изразом:

$$\rho_{th} = \frac{1}{tr e^{-\beta H_S}} e^{-\beta H_S} = \frac{1}{tr e^{-\beta H_S}}\left(e^{-\frac{\beta\omega}{2}}|1\rangle\langle 1| + e^{\frac{\beta\omega}{2}}|0\rangle\langle 0|\right). \tag{3.36г}$$

Коришћењем (3.36в) и једнакости $|1\rangle\langle 1| = \frac{I+Z}{2}, |0\rangle\langle 0| = \frac{I-Z}{2}$, (3.36г) се може записати:

$$\rho_{th} = \frac{1}{tre^{-\beta H_S}}\left(\cosh\frac{\beta\omega}{2} - Z\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right), \tag{3.36д}$$

што сменом у (3.36а) даје, члан по члан:

$$\sigma_+\,\rho\sigma_- = \frac{1}{tre^{-\beta H_S}}\left(\sigma_+\sigma_-\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \sigma_+\sigma_- Z\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right), \tag{3.36ђ}$$

$$-\frac{1}{2}\{\sigma_-\,\sigma_+\,,\rho\} = \frac{1}{tre^{-\beta H_S}}\left(-\sigma_-\sigma_+\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \sigma_-\sigma_+ Z\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right). \tag{3.36е}$$

Сабирањем (3.36ђ) и (3.36е) добија се први сабирак са д.с. (3.36а):

$$\frac{\gamma_0 n(\omega)}{tre^{-\beta H_S}}\left([\sigma_+\,,\sigma_-]\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \{\sigma_-\,,\sigma_+\}\mathrm{Z}\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right). \tag{3.36ж}$$

Заменом $\sigma_+ \leftrightarrow \sigma_-$ у (3.36ж) се добија други сабирак:

$$\frac{\gamma_0\big(1+n(\omega)\big)}{tre^{-\beta H_S}}\left(-[\sigma_+\,,\sigma_-]\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \{\sigma_-\,,\sigma_+\}\mathrm{Z}\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right). \tag{3.36з}$$

Коришћењем дефиниција датих уз израз (3.9а) лако следи: $[\sigma_+\,,\sigma_-] = Z, \{\sigma_-\,,\sigma_+\} = I$, па је д.с. (3.36а) облика:

$$\frac{\gamma_0 n(\omega)}{tre^{-\beta H_S}}\left(Z\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \mathrm{Z}\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right) + \frac{\gamma_0\big(1+n(\omega)\big)}{tre^{-\beta H_S}}\left(-Z\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \mathrm{Z}\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right) =$$
$$\frac{2\gamma_0 n(\omega)}{tre^{-\beta H_S}}\mathrm{Z}\sinh\frac{\beta\omega}{2} + \frac{\gamma_0}{tre^{-\beta H_S}}\left(-Z\cosh\frac{\beta\omega}{2} + \mathrm{Z}\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right) = \frac{\gamma_0 Z}{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}\Bigg((2n(\omega) +$$
$$1)\sinh\frac{\beta\omega}{2} - \cosh\frac{\beta\omega}{2}\Bigg) = \frac{\gamma_0 Z}{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}\left(\left(2\frac{1}{e^{\beta\omega}-1} + 1\right)\sinh\frac{\beta\omega}{2} - \cosh\frac{\beta\omega}{2}\right) = 0, \tag{3.36и}$$

што доказује да је стање (3.36г) стационарно. Сада је на реду провера асимптотског понашања. У ту сврху биће довољно израчунати временску промену попуњености горњег енергијског нивоа. Из (3.36а) следи:

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \gamma_0 n(\omega)\left(\langle 1|\sigma_+\,\rho\sigma_-|1\rangle - \frac{1}{2}\langle 1|\{\sigma_-\,\sigma_+\,,\rho\}|1\rangle\right) + \gamma_0\big(1 +$$
$$n(\omega)\big)\left(\langle 1|\sigma_-\,\rho\sigma_+|1\rangle - \frac{1}{2}\langle 1|\{\,\sigma_+\sigma_-\,,\rho\}|1\rangle\right) = \gamma_0 n(\omega) - \gamma_0(2n(\omega)+1)\rho_{11},$$

(3.36ј)

где је коришћено $\rho_{00} = 1 - \rho_{11}$.

Решавање (3.36ј) је елементарно и даје:

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0)e^{-\gamma_0(2n(\omega)+1)t} + \frac{n(\omega)}{2n(\omega)+1}\left(1 - e^{-\gamma_0(2n(\omega)+1)t}\right). \qquad (3.36к)$$

Из (3.36к) следи *једнозначан* лимес асимптотског понашања попуњености побуђеног стања:

$$\lim_{t\to\infty} \rho_{11}(t) = \frac{n(\omega)}{2n(\omega)+1} = \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\omega}{2}}+e^{-\frac{\beta\omega}{2}}} = \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{tre^{\beta H_S}}, \qquad (3.36л)$$

што је тачно статистичка тежина стања $|1\rangle\langle 1|$ у (3.36г). Овиме је доказана једнозначност асимптотског лимеса, који јесте стање (3.36г).

НАПОМЕНА: Случај апсолутне нуле је тривијалан у оквиру овог задатка, јер увек даје $\lim_{t\to\infty} \rho_{11}(t) = 0$, за свако почетно стање. Модел (3.36а) се може препознати као формално проширење модела пригушења амплитуде једног кубита, изучаваног у задатку 3.17. Овиме је добијена потврда да је стационарно стање у Задатку 3.17 истовремено и АСС; видети Задатке 3.9, 3.17, али и глобални *изузетак* представљен Задатком 3.27 – који се тиче динамике која *има сингуларитет* (у једном временском тренутку) па отуда није обухваћено ставовима који се тичу глатких динамика каква је хомогена Марковљева динамика у овом задатку.

3.37 Доказати да је канонско топлотно равнотежно стање јединствено стационарно стање за пригушени хармонијски осцилатор.

Решење: У Задатку 3.32 доказана је потребност да такво стање буде стационарно за процес – из услова стационарности добијено је (3.32к). У овом задатку биће доказано да је (3.32к) довољан услов за стационарност као и да је то стање једнозначно.

Из (3.32к) непосредно следи: $[\rho, a^{+}a] = 0 = [\rho, aa^{+}]$. Сменом (3.32к) у д.с. (3.32а) и коришћењем једнакости[31]:

$$\rho a^{+} = e^{-\beta\omega} a^{+}\rho,\ \ \rho a = e^{\beta\omega} a\rho, \qquad (3.37а)$$

следи:

$$-i\omega[a^{+}a, \rho_{ss}] + \gamma(N+1)\left(a\rho_{ss}a^{+} - \tfrac{1}{2}\{a^{+}a, \rho_{ss}\}\right) + \gamma N\left(a^{+}\rho_{ss}a - \tfrac{1}{2}\{aa^{+}, \rho_{ss}\}\right) = \gamma(N+1)\left(e^{-\beta\omega}aa^{+}\rho_{ss} - a^{+}a\rho_{ss}\right) + \gamma N\left(e^{\beta\omega}a^{+}a\rho_{ss} - aa^{+}\rho_{ss}\right) = \gamma(N+1)\left(e^{-\beta\omega}\rho_{ss} + e^{-\beta\omega}a^{+}a\rho_{ss} - a^{+}a\rho_{ss}\right) + \gamma N\left(e^{\beta\omega}a^{+}a\rho_{ss} - \rho - a^{+}a\rho_{ss}\right) = e^{-\beta\omega}\gamma N\left(-\left(e^{\beta\omega}-1\right)\rho + \left(e^{\beta\omega}-1\right)^{2}a^{+}a\rho\right) + e^{-\beta\omega}\gamma\left(\rho - \left(e^{\beta\omega}-1\right)a^{+}a\rho\right) = 0, \qquad (3.37б)$$

при чему последњи корак следи коришћењем $N = \left(e^{\beta\omega}-1\right)^{-1}$. Тако је доказано да је ово стање у језгру лиувилијана мастер једначине ($\mathcal{L}[\rho_{ss}] = 0$). Како већ знамо (Задатак 3.32) да је ρ_{ss} и потребан услов за стационарност разматраног процеса, доказ је завршен.

НАПОМЕНА: Асимптотичност „канонског" стања за пригушени хармонијски осцилатор овде није доказана (мада јесте у претходном задатку за модел једног кубита) – али је његово постојање успостављено општим резултатима [2]. Општи услови за постојање, не само стационарног стања, већ да оно буде и АСС, познати су *само за хомогене Марковљеве процесе* (динамичке *полугрупе*). И овај модел, као и модел из претходног задатка, су овог типа – хомогени Марковљеви процеси – па имају јединствено стационарно стање које је уједно и асимптотско (тј., АСС) – видети теоријски увод и референцу [2].

3.38 Задато је пресликавање: $\Phi_{\mathrm{i}}(t,0)[\rho] = \left(1-p(t)\right)\rho(0) + p\sigma_{i}\rho(0)\sigma_{i}$, где сигма оператори представљају Паулијеве операторе једног кубита а вероватноћа $p = (1-e^{-rt})/2 \in [0,1/2)$. Испитати особине пресликавања које се добија као конвексна комбинација двају задатих пресликавања:

---

[31] Нпр., изрази (5.40) и (5.41) у [2]. Видети и изузетно корисну збирку задатака: W.-H. Steeb, Y. Hardy, Problems and Solutions for Bose, Spin and Fermi Systems, World Scientific, Singapore, 2015.

$$\Phi = a\Phi_z + (1-a)\Phi_y, \tag{3.38а}$$

са временски независном вероватноћом $a \in (0,1)$.

Решење: Смењујући дефиницију пресликавања добија се:

$$\Phi[\rho] = (1-p)\rho + ap\sigma_z\rho(0)\sigma_z + (1-a)p\sigma_y\rho(0)\sigma_y.$$

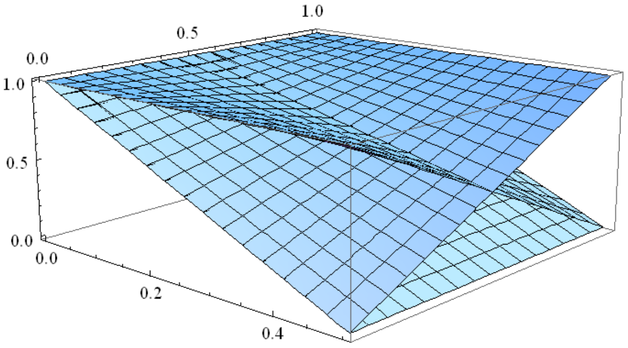
Матрица пресликавања задовољава једначину:

$$\mathrm{A}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{n_z} \\ \mathrm{n_-} \\ \mathrm{n_+} \\ 1-\mathrm{n_z} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\big(1+\big(1+2(-1+a)p\big)n_z\big) \\ \frac{1}{2}\big(\big(1-(1+a)p\big)n_- + (-1+a)pn_+\big) \\ \frac{1}{2}\big((-1+a)pn_- + \big(1-(1+a)p\big)n_+\big) \\ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + p - ap\right)n_z \end{pmatrix}$$

одакле следи:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1+(-1+a)\mathrm{p} & 0 & 0 & (1-a)\mathrm{p} \\ 0 & 1-(1+a)\mathrm{p} & (-1+a)\mathrm{p} & 0 \\ 0 & (-1+a)\mathrm{p} & 1-(1+a)\mathrm{p} & 0 \\ (1-a)\mathrm{p} & 0 & 0 & 1+(-1+a)\mathrm{p} \end{pmatrix} \tag{3.38б}$$

чије су својствене вредности: $1, 1-2p, 1-2ap, 1-2p+2ap$. Слика 3.26 указује на то да су све својствене вредности ненулте, тј., постоји инверзни процес за нулти почетни тренутак.



Слика 3.26 Својствене вредности матрице процеса (3.38б).

Динамичка мапа

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1+(-1+a)\mathrm{p} & 0 & 0 & 1-(1+a)\mathrm{p}\\ 0 & (1-a)\mathrm{p} & (-1+a)\mathrm{p} & 0\\ 0 & (-1+a)\mathrm{p} & (1-a)\mathrm{p} & 0\\ 1-(1+a)\mathrm{p} & 0 & 0 & 1+(-1+a)\mathrm{p}\end{pmatrix},$$

и има ненегативне својствене вредности: $0{,}2(1-p), 2ap, 2p(1-a)$, за све вредности параметара и сваки тренутак времена. Дакле, пресликавање је инвертибилно и потпуно позитивно.

Често коришћени поступак води до динамичке мапе за ненулти почетни тренутак. Полазећи од $A(t,s)=A(t)A^{-1}(s)$, динамичка матрица за ненулти почетни тренутак је облика:

$$B(t,s)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\alpha & 0 & 0 & \beta+\gamma\\ 0 & 1-\alpha & \beta-\gamma & 0\\ 0 & \beta-\gamma & 1-\alpha & 0\\ \beta+\gamma & 0 & 0 & 1+\alpha\end{pmatrix},$$

где су: $\alpha=\frac{2ap-2p+1}{2aq-2q+1}, \beta=\frac{1-2p}{1-2q}, \gamma=\frac{1-2ap}{1-2aq}$, док је $p=1-e^{-rt}>q=1-e^{-st}$, за $t>s$. Својствене вредности ове матрице износе: $1+\alpha-\beta-\gamma, 1-\alpha+\beta-\gamma, 1-\alpha-\beta+\gamma, 1+\alpha+\beta+\gamma$. Одавде је очигледно да ће матрица $B(t,s)$ бити позитивна, тј., са ненегативним својственим вредностима, за $|1\pm\alpha|\geq|\beta\pm\gamma|$. Међутим, за избор параметара, $p=0.4, q=0.2, a=0.51$, једна својствена вредност је негативна и износи (приближно): -0.083. Непозитивност динамичке матрице за ненулти почетни тренутак значи да разматрани процес, иако је растављив, није Марковљев.

НАПОМЕНА: Још специфичнији модел ове врсте представљен је у Задатку 4.28.

3.39 Као у претходном задатку, али за процес $\Phi=a\Phi_x+(1-a)\Phi_y$.

Решење: Краћи запис процеса:

$$\Phi[\rho]=(1-p)\rho+apX\rho X+p(1-a)Y\rho Y \qquad (3.39a)$$

води једначини:

$$A\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{n_z}\\ \mathrm{n_-}\\ \mathrm{n_+}\\ 1-\mathrm{n_z}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+(1-2p)n_z\right)\\ \frac{1}{2}\left((1-p)n_-+(-1+2a)pn_+\right)\\ \frac{1}{2}\left((-1+2a)pn_-+n_+-pn_+\right)\\ \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+p\right)n_z\end{pmatrix},$$

одакле рутински следи матрица процеса:

$$A=\begin{pmatrix}1-p & 0 & 0 & p\\ 0 & 1-p & (-1+2a)p & 0\\ 0 & (-1+2a)p & 1-p & 0\\ p & 0 & 0 & 1-p\end{pmatrix}, \qquad (3.39б)$$

чије су својствене вредности све ненулте: $1{,}1-2p, 1-2ap, 1+2(-1+a)p$. Тако следи инвертибилност матрице а отуда и растављивост процеса.

Инверзна матрица сада гласи:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1+p}{-1+2p} & 0 & 0 & \frac{p}{-1+2p}\\ 0 & \frac{-1+p}{-1+2p+4(-1+a)ap^2} & \frac{(-1+2a)p}{-1+2p+4(-1+a)ap^2} & 0\\ 0 & \frac{(-1+2a)p}{-1+2p+4(-1+a)ap^2} & \frac{-1+p}{-1+2p+4(-1+a)ap^2} & 0\\ \frac{p}{-1+2p} & 0 & 0 & \frac{-1+p}{-1+2p}\end{pmatrix},$$

па отуда и матрица за ненулти почетни тренутак времена:

$$A(t,s)=A(t)A^{-1}(s)$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{-1+p+q}{-1+2q} & 0 & 0 & \frac{p-q}{1-2q}\\ 0 & \frac{-1+p+q+4(-1+a)apq}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & -\frac{(-1+2a)(p-q)}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & 0\\ 0 & -\frac{(-1+2a)(p-q)}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & \frac{-1+p+q+4(-1+a)apq}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & 0\\ \frac{p-q}{1-2q} & 0 & 0 & \frac{-1+p+q}{-1+2q}\end{pmatrix}$$

где је претпостављено $q < p$. Одговарајућа динамичка матрица:

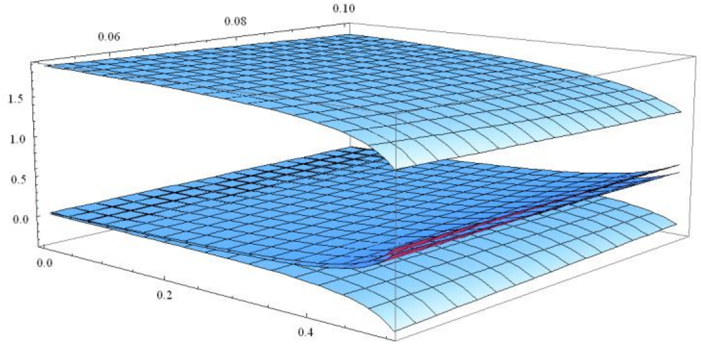
$$B(t,s)=\begin{pmatrix} \frac{-1+p+q}{-1+2q} & 0 & 0 & \frac{-1+p+q+4(-1+a)apq}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} \\ 0 & \frac{p-q}{1-2q} & -\frac{(-1+2a)(p-q)}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & 0 \\ 0 & -\frac{(-1+2a)(p-q)}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & \frac{p-q}{1-2q} & 0 \\ \frac{-1+p+q+4(-1+a)apq}{-1+2q+4(-1+a)aq^2} & 0 & 0 & \frac{-1+p+q}{-1+2q} \end{pmatrix} \qquad (3.39в)$$

има својствене вредности:

$$-\frac{4(-1+a)a(p-q)\left(-q+q^2\right)}{(-1+2q)(-1+2q-4aq^2+4a^2q^2)},-\frac{2a(p-q)\left(-1+2q-2q^2+2aq^2\right)}{(-1+2q)(-1+2q-4aq^2+4a^2q^2)},-\frac{2(p-q)\left(-1+a+2q-2aq-2aq^2+2a^2q^2\right)}{(-1+2q)(-1+2q-4aq^2+4a^2q^2)},$$

$$\frac{2(1-p-3q+2pq+2apq-2a^2pq+2q^2+2aq^2-2a^2q^2-6apq^2+6a^2pq^2-2aq^3+2a^2q^3)}{(-1+2q)(-1+2q-4aq^2+4a^2q^2)}.$$

Графички представљене, својствене вредности откривају негативност једне од њих за неки избор параметара ($a=1/3, q=p-\varepsilon, \varepsilon\in[0.05{,}0.1]$), што говори о непотпуној позитивности динамике за ненулти почетни тренутак. То јест, разматрани процес није Марковљев.



Слика 3.27 Својствене вредности динамичке матрице (3.39в), $p\in[0{,}1/2], \varepsilon\in[0.05{,}0.1]$. Уочити да за неке вредности параметара, једна површ иде испод нулте равни графика.

3.40 Размотрити особине пресликавања процеса који се добија узастопном применом, прво процеса Φ_z, па онда процеса Φ_y за пресликавања уведена у Задатку 3.38.

Решење: Задатак је изучити особине пресликавања:

$$\mathcal{G}[\rho]=\Phi_y\left[\Phi_z[\rho]\right], \qquad (3.40а)$$

за произвољно почетно стање ρ. Овде одмах морамо увести $p=(1-e^{-rs})/2$ и $q=(1-e^{-rt})/2$, за Φ_z и Φ_y, редом, без икаквог ограничења на однос тренутака s и t - свака од ових операција делује независно од друге, осим што се одвијају задатим редом. Нас занимају особине динамичке мапе $\mathcal{G}$ за коју, по дефиницији (3.40а), укупна динамика траје временски интервал $t+s$. Сада би требало проучити потпуну позитивност мапе, као и њену растављивост пре тренутка s у примени процеса Φ_z, као и пре тренутка t у примени процеса Φ_y.

Матрица процеса Φ_z:

$$A_1(s,0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-2p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-2p & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3.40б}$$

је дијагоналног облика – са очигледно ненултим својственим вредностима, те је отуда и инвертибилна. Лако се добија инверзна матрица за овај процес:

$$A_1^{-1}(s,0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1-2p} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{1-2p} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.40в}$$

Са друге стране, матрица процеса Φ_y је облика:

$$\mathrm{A}_2(\mathrm{t},0)=\begin{pmatrix}1-q & 0 & 0 & q\\ 0 & 1-q & -q & 0\\ 0 & -q & 1-q & 0\\ q & 0 & 0 & 1-q\end{pmatrix}, \tag{3.40г}$$

чија је инверзна матрица:

$$A_2^{-1}(\mathrm{t},0)=\begin{pmatrix}\frac{1-3q+2q^2}{1-4q+4q^2} & 0 & 0 & \frac{-q+2q^2}{1-4q+4q^2}\\ 0 & \frac{1-3q+2q^2}{1-4q+4q^2} & \frac{q-2q^2}{1-4q+4q^2} & 0\\ 0 & \frac{q-2q^2}{1-4q+4q^2} & \frac{1-3q+2q^2}{1-4q+4q^2} & 0\\ \frac{-q+2q^2}{1-4q+4q^2} & 0 & 0 & \frac{1-3q+2q^2}{1-4q+4q^2}\end{pmatrix}. \tag{3.40д}$$

Тако је укупни процес $\mathcal{G}$ репрезентован матрицом:

$$\mathrm{A}(\mathrm{t}+\mathrm{s},0)=\mathrm{A}_2(\mathrm{t},0)\mathrm{A}_1(\mathrm{s},0)=$$
$$\begin{pmatrix} 1-q & 0 & 0 & q \\ 0 & (2\mathrm{p}-1)(\mathrm{q}-1) & (2p-1)q & 0 \\ 0 & (2\mathrm{p}-1)q & (2\mathrm{p}-1)(\mathrm{q}-1) & 0 \\ q & 0 & 0 & 1-q \end{pmatrix}, \qquad \text{(3.40ђ)}$$

чије су својствене вредности: $1{,}1-2p, 1-2q, (-1+2p)(-1+2q)$, које су, по дефиницији процеса (претходни задатак), све ненулте. То јест, укупни процес је инвертибилан па отуда и растављив.

Динамичка матрица укупног процеса, сходно изразу (3.40ђ), гласи:

$$B=\begin{pmatrix} 1-q & 0 & 0 & (2\mathrm{p}-1)(\mathrm{q}-1) \\ 0 & \mathrm{q} & (2p-1)q & 0 \\ 0 & (2\mathrm{p}-1)q & \mathrm{q} & 0 \\ (2\mathrm{p}-1)(\mathrm{q}-1) & 0 & 0 & 1-q \end{pmatrix},$$

са својственим вредностима $2pq, 2(p-pq)$,$2(q-pq)$,$2(1-p)(1-q)$, које су све ненегативне, јер $p,q<1/2$. Дакле, процес је растављив и потпуно позитиван. Сада би требало проучити динамику за ненулти почетни тренутак.

Проучимо прво динамичко пресликавање за неки тренутак $u<s$. Како важи $\Phi(t+s,0)=\Phi(t+s,u)\Phi(u,0)$, за $u<s$, по дефиницији (3.40а), $\Phi(u,0)=\Phi_1(u,0)$. Отуда, за $u<s$, $\Phi(t+s,u)=\Phi(t+s,0)\Phi_1^{-1}(u,0)$. Томе одговара неједнакост $m=\frac{1-e^{-ru}}{2}<p=\frac{1-e^{-rs}}{2}<\frac{1}{2}$. Матрична репрезентација, сходно (3.40в,ђ) гласи:

$$A(t+s,u)=A(t+s,0)A_1^{-1}(u,0)$$
$$=\begin{pmatrix} 1-q & 0 & 0 & q \\ 0 & \dfrac{(1-2p)(1-q)}{1-2m} & \dfrac{(2\mathrm{p}-1)q}{1-2m} & 0 \\ 0 & \dfrac{(2\mathrm{p}-1)q}{1-2m} & \dfrac{(1-2p)(1-q)}{1-2m} & 0 \\ q & 0 & 0 & 1-q \end{pmatrix}$$

чија је динамичка матрица:

$$B(t+s,u) = \begin{pmatrix} 1-q & 0 & 0 & \frac{(-1+2p)(-1+q)}{1-2m} \\ 0 & \mathrm{q} & \frac{(-1+2p)q}{1-2m} & 0 \\ 0 & \frac{(-1+2p)q}{1-2m} & \mathrm{q} & 0 \\ \frac{(-1+2p)(-1+q)}{1-2m} & 0 & 0 & 1-q \end{pmatrix}$$

својствених вредности: $\frac{2(1-m-p)(1-q)}{1-2m}, \frac{2(\mathrm{p}-m)q}{1-2m}, \frac{2(\mathrm{p}-m)(1-q)}{1-2m}, \frac{2(1-m-p)q}{1-2m}$. Како важи $m < p < \frac{1}{2}$, уз мало пажње види се да су све својствене вредности ненегативне. То говори да је разматрани процес Марковљев.

Коначно, размотримо динамику за ненулти почетни тренутак w, такав да важе неједнакости: $s < w < t + s$. Тада, по дефиницији процеса, за $w > s$, $\Phi(t+s,w) = \Phi_2(t,t_w)$, где је искоришћено да, за процес Φ_2, израз (3.40а) уводи тренутак s као почетни тренутак процеса. Отуд општи услов растављивости, $\Phi(t+s,0) = \Phi(t+s,w)\Phi(w,0)$, даје: $\Phi(t+s,0)\Phi^{-1}(w,0) = \Phi(t+s,w) = \Phi_2(t,t_w) = \Phi_2(t,0)\Phi_2^{-1}(t_w,0)$. На основи (3.40г,д), матрични запис процеса гласи:

$$\mathrm{A}(t+s,w) = A_2(t,0)A_2^{-1}(t_w,0)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-1+p+q}{-1+2q} & 0 & 0 & \frac{p-q}{1-2q} \\ 0 & \frac{-1+p+q}{-1+2q} & \frac{p-q}{-1+2q} & 0 \\ 0 & \frac{p-q}{-1+2q} & \frac{-1+p+q}{-1+2q} & 0 \\ \frac{p-q}{1-2q} & 0 & 0 & \frac{-1+p+q}{-1+2q} \end{pmatrix}$$

уз дефиниције: $q = \frac{1-e^{-r\,t_w}}{2} < p = \frac{1-e^{-r\,t}}{2} < \frac{1}{2}$.

Одговарајућа динамичка мапа

$$B(t+s,w)=\begin{pmatrix}\frac{-1+p+q}{-1+2q} & 0 & 0 & \frac{-1+p+q}{-1+2q}\\ 0 & \frac{p-q}{1-2q} & \frac{p-q}{-1+2q} & 0\\ 0 & \frac{p-q}{-1+2q} & \frac{p-q}{1-2q} & 0\\ \frac{-1+p+q}{-1+2q} & 0 & 0 & \frac{-1+p+q}{-1+2q}\end{pmatrix}$$

има својствене вредности: $0,\frac{2(p-q)}{1-2q},\frac{2(1-p-q)}{1-2q}$, које су све ненегативне, па је процес (3.40а) Марковљев и за $w>s$.

3.41 Као у претходном задатку, али за процес:

$$\mathcal{G}[\rho]=\Phi_y\big[\Phi_x[\rho]\big]. \tag{3.41a}$$

Решење: У пуној аналогији са претходним задатком, за матрицу процеса се добија:

$$A(t+s,0)=\begin{pmatrix}1-p-q+2pq & 0 & 0 & p+q-2pq\\ 0 & 1-p-q & p-q & 0\\ 0 & p-q & 1-p-q & 0\\ p+q-2pq & 0 & 0 & 1-p-q+2pq\end{pmatrix},$$

чије су својствене вредности све ненулте: $1,1-2p,1-2q,(1-2p)(1-2q)$. Отуда следи закључак да је процес инвертибилан и растављив.

Својствене вредности одговарајуће динамичке матрице су све ненегативне: $2pq,2p(1-q)$,$2q(1-p)$,$2(1-p)(1-q)$. Тако закључујемо да је укупни процес растављив и потпуно позитиван.

(а) Инверзна матрица за Φ_x процес гласи:

$$\mathrm{A}_x^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1+p}{-1+2p} & 0 & 0 & \frac{p}{-1+2p}\\ 0 & \frac{-1+p}{-1+2p} & \frac{p}{-1+2p} & 0\\ 0 & \frac{p}{-1+2p} & \frac{-1+p}{-1+2p} & 0\\ \frac{p}{-1+2p} & 0 & 0 & \frac{-1+p}{-1+2p}\end{pmatrix},$$

што даље води матрици за ненулти почетни тренутак $u < s$:

$$A(t,u) = A(t+s,0)A_x^{-1}(u,0)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1+m+p+q-2pq}{-1+2m} & 0 & 0 & \frac{m-q+p(-1+2q)}{-1+2m} \\ 0 & \frac{-1+m+p}{-1+2m} - q & \frac{m-p}{-1+2m} - q & 0 \\ 0 & \frac{m-p}{-1+2m} - q & \frac{-1+m+p}{-1+2m} - q & 0 \\ \frac{m-q+p(-1+2q)}{-1+2m} & 0 & 0 & \frac{-1+m+p+q-2pq}{-1+2m} \end{pmatrix},$$

где је $m = \frac{1-e^{-ru}}{2} < p = \frac{1-e^{-rs}}{2} < \frac{1}{2}$. Својствене вредности одговарајуће динамичке матрице су све ненегативне: $\frac{2(1-m-p)(1-q)}{1-2m}, \frac{2(\mathrm{p}-m)q}{1-2m}, \frac{2(\mathrm{p}-m)(1-q)}{1-2m}, \frac{2(1-m-p)q}{1-2m}$. Тако постаје јасно да је за задати избор почетног тренутка, процес Марковљев.

(б) Разматрани процес је исти као у претходном задатку под (б), па је резултат већ познат: процес је Марковљев и за почетни тренутак $w > s$.

3.42 Поновити Задатак 3.21 коришћењем услова неувећања растојања међу стањима као критеријума за Марковљевост; растојање стања, $D(\rho,\sigma)$, уведено је у Задатку 1.2.

Решење: Динамички процес Φ је Марковљев АККО не расте растојање између било која два коначна стања, ρ и σ, тј., АККО $\frac{dD(\rho(t),\sigma(t))}{dt} \equiv \frac{dD(\Phi[\rho(0)],\Phi[\sigma(0)])}{dt} \leq 0$; растојање $D(\rho,\sigma)$ је уведено у Задатку 1.2, изразом $D(\rho,\sigma) = tr\left(\sqrt{(\rho-\sigma)^2}\right)$. Задатак је проверити ваљаност, у скраћеном облику, услова $\frac{dD(\rho(t),\sigma(t))}{dt} \leq 0$ за разматране процесе.

(а) пригушење фазе, Задатак 3.1 даје коначно стање:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & \cos\omega t\ n_- \\ \cos\omega t\, n_+ & 1-n_z \end{pmatrix}.$$

Упоредимо ово стање са другим коначним стањем, $\sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+m_z & \cos\omega t\ \ m_- \\ \cos\omega t\, m_+ & 1-m_z \end{pmatrix}$:

$$\rho-\sigma=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1-m_z)+\frac{1}{2}(1+n_z) & -\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[t\omega]m_- +\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[t\omega]n_- \\ -\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[t\omega]m_+ +\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[t\omega]n_+ & \frac{1}{2}(-1+m_z)+\frac{1}{2}(1-n_z) \end{pmatrix}$$

одакле:

$$(\rho-\sigma)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\mathrm{Cos}[t\omega]^2(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + (m_z - n_z)^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(\mathrm{Cos}[t\omega]^2(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + (m_z - n_z)^2) \end{pmatrix}$$

Како је добијена матрица дијагонална, простим кореновањем својствених вредности на дијагонали и њиховим сабирањем се добија:

$$\mathrm{D}(\rho,\sigma) = \sqrt{\mathrm{Cos}[\mathrm{t}\omega]^2(\mathrm{m}_- - \mathrm{n}_-)(\mathrm{m}_+ - \mathrm{n}_+) + (\mathrm{m}_\mathrm{z} - \mathrm{n}_\mathrm{z})^2},$$

што је очигледно периодична функција која не зависи од избора стања за поређење. Периодично увећање растојања потврђује налаз Задатка 3.21: процес пригушења фазе није Марковљев.

(б) пригушење амплитуде, други део Задатка 3.4, даје коначно стање:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-n_z+(1-e^{-2\gamma t})(1+n_z) & e^{-\gamma t}n_+ \\ e^{-\gamma t}n_- & e^{-2\gamma t}(1+n_z) \end{pmatrix}.$$

Поређење са другим стањем у истом тренутку даје:

$$\rho-\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1+m_z-(1-e^{-2t\gamma})(1+m_z))+\frac{1}{2}(1-n_z+(1-e^{-2t\gamma})(1+n_z)) & -\frac{1}{2}e^{-t\gamma}m_+ +\frac{1}{2}e^{-t\gamma}n_+ \\ -\frac{1}{2}e^{-t\gamma}m_- +\frac{1}{2}e^{-t\gamma}n_- & -\frac{1}{2}e^{-2t\gamma}(1+m_z)+\frac{1}{2}e^{-2t\gamma}(1+n_z) \end{pmatrix}$$

као и квадрат:

$$(\rho-\sigma)^2 = \frac{1}{4}e^{-4t\gamma}(e^{2t\gamma}(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + (m_z - n_z)^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Као и у претходном примеру, кореновање дијагоналних вредности и њихово сабирање даје:

$$\mathrm{D}(\rho, \sigma) = \sqrt{e^{-2t\gamma}(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + e^{-4t\gamma}(m_z - n_z)^2},$$

што је глатко опадајућа функција времена. Дакле, пригушење амплитуде је Марковљев процес.

(в) процес уопштеног пригушења амплитуде, Задатак 3.5, даје коначно стање:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (-1 + 2p)\gamma - (-1 + \gamma)n_z & \sqrt{1 - \gamma}n_- \\ \sqrt{1 - \gamma}n_+ & 1 + \gamma - 2p\gamma + (-1 + \gamma)n_z \end{pmatrix}.$$

Сада квадрат разлике стања има дијагонални облик:

$$(\rho - \sigma)^2 = \frac{(1 - \gamma)((m_- - n_-)(m_+ - n_+) - (-1 + \gamma)(m_z - n_z)^2)}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

па лако следи растојање:

$$\mathrm{D}(\rho, \sigma) = \sqrt{(1 - \gamma)((m_- - n_-)(m_+ - n_+) - (-1 + \gamma)(m_z - n_z)^2)}.$$

Памтећи да је $\gamma = 1 - e^{-t/T}$, очигледно је да растојање представља монотоно опадајућу функцију времена, што значи да је процес Марковљев.

(г) процес уопштене деполаризације, Задатак 3.6, даје коначно стање у облику:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + e^{-4t\gamma}n_z & e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}}n_- \\ e^{\frac{4t\gamma}{\Omega}}n_+ & 1 - e^{-4t\gamma}n_z \end{pmatrix}.$$

За овај процес, квадрат разлике стања је у матричном облику:

$$(\rho - \sigma)^2 = \frac{1}{4}(e^{\frac{8t\gamma}{\Omega}}(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + e^{-8t\gamma}(m_z - n_z)^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

што води растојању између стања:

$$\mathrm{D}(\rho, \sigma) = \sqrt{e^{\frac{8t\gamma}{\Omega}}(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + e^{-8t\gamma}(m_z - n_z)^2}.$$

Како је $\Omega < 0$, и овде растојање између стања монотно опада са временом и тако потврђује Марковљев карактер процеса.

НАПОМЕНА: Овде је згодно проширити напомену дату уз Задатак 2.30. Наиме, на први поглед би се могло учинити да увећање чистости стања, тј., прелазак из мешаног у чисто стање (као, нпр., за пригушење амплитуде), би могло подразумевати повратни утицај окружења – што би било у нескладу са једним критеријумом Марковљевости, који подразумева одсуство повратне информације од окружења ка систему. Међутим, ова интуиција је погрешна. Како показује Задатак 2.30, само унитална пресликавања испуњавају услов неувећања чистости стања. Са друге стране, постојање „полугрупних“ процеса (попут, већ поменутог, пригушења амплитуде) који могу увећати чистост стања указује на то да критеријум чистости, Задатак 2.30, није истовремено и критеријум марковљевости процеса. Један ваљани критеријум је неувећање растојања између система (што је изучавано у овом задатку) које је у складу са неповратношћу информације из окружења у систем. Тако и важна физичка лекција: повећање чистости стања отвореног система не мора бити последица повраћаја информације из окружења у систем.

3.43 Једно уопштење процеса разматраног у Задатку 3.20 је дато мастер једначином са временски зависном функцијом пригушења[32]:

$$\dot{\rho} = \gamma(t)(Z\rho Z - \rho), \qquad \gamma(t) = \frac{r}{2+(q-2)e^{rt}} \qquad (3.43а)$$

где су реалне константе $q > 2$ и $r > 0$. Испитати Марковљевост процеса коришћењем критеријума неувећања растојања међу стањима.

Решење: Систем диференцијалних једначина за елементе статистичког оператора је већ дат изразом (3.20в), уз замену тамошње константе пригушења, γ, временски зависном константом из израза (3.43а). Отуда се лако види да је израз (3.20г) решење и једначине (3.43а) уз замену γ временски зависним фактором $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(t')\, dt'$:

---

[32] arXiv:1912.07545v1 [quant-ph] 16 Dec 2019

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & n_- e^{-2\Gamma(t)} \\ n_+ e^{-2\Gamma(t)} & 1-n_z \end{pmatrix}.$$

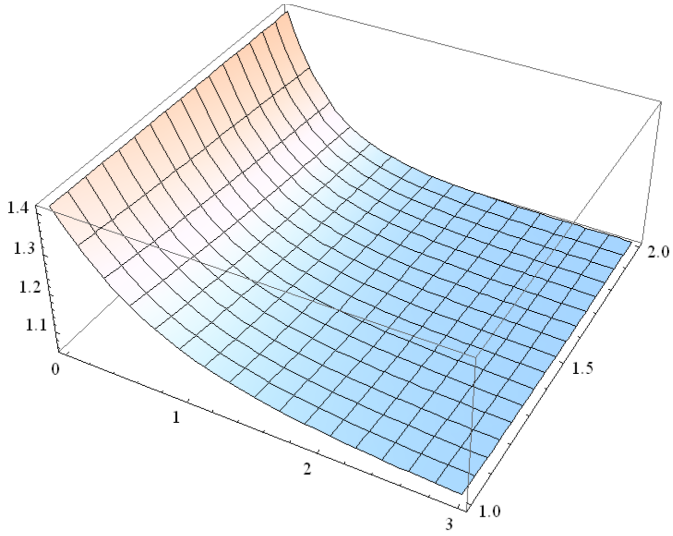
Аналогно претходном задатку, квадрат разлике стања је дат изразом:

$$(\rho-\sigma)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-4\Gamma}(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + (m_z - n_z)^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.43б)$$

при чему је

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2}\left(rt - \ln[2 + e^{rt}(-2+q)] + \ln[q]\right).$$

Тако следи растојање (које је траг корена оператора (3.43б)), $D(\rho,\sigma) = \sqrt{e^{-4\Gamma}(m_- - n_-)(m_+ - n_+) + (m_z - n_z)^2}$, које је графички представљено Сликом 3.28.



Слика 3.28 Приказ растојања између стања за следећи избор параметара: $n_z = 1 = m_\pm, m_z = 0 = n_\pm, q = 3$, за $t \in [0,3], r \in [1,2]$.

Временско опадање растојања истиче Марковљев карактер процеса (3.43а).

3.44 Испитати услов неувећања чистости стања изучаваног у Задатку 2.30, за процесе уведене у Задацима 3.20 (пример униталног процеса) и за процес пригушења амплитуде (други део Задатка 3.4).

Решење: Из израза (3.20г) непосредно следи:

$$\mathrm{\rho}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(e^{-4t\gamma}n_-n_+ + (1+n_z)^2) & \frac{1}{2}e^{-2t\gamma}n_- \\ \frac{1}{2}e^{-2t\gamma}n_+ & \frac{1}{4}(e^{-4t\gamma}n_-n_+ + (1-n_z)^2) \end{pmatrix},$$

па временски извод чистости стања:

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}(tr\rho^2) = -2\gamma n_-n_+e^{-4\gamma t} < 0. \qquad (3.44а)$$

За пригушење амплитуде, десна страна израза (3.4з) непосредно даје:

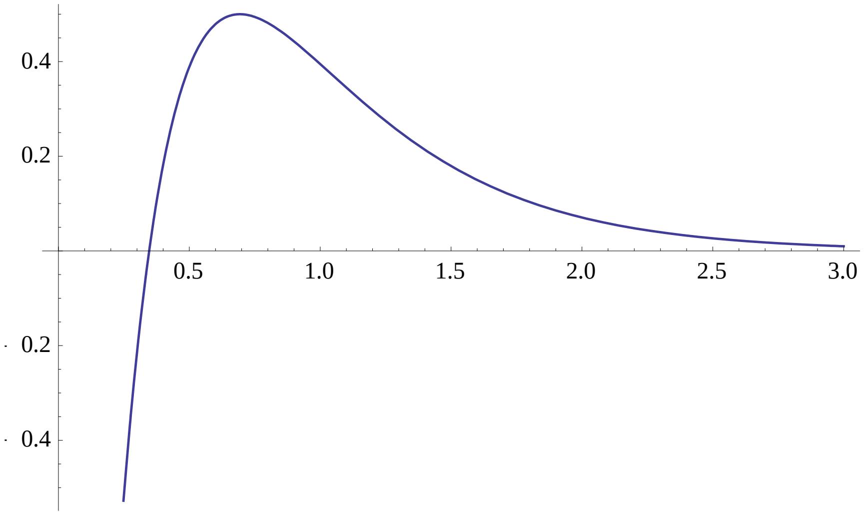
$$\rho^2 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-4t\gamma}(e^{2t\gamma}n_-n_+ + (1-2e^{2t\gamma}+n_z)^2) & \frac{1}{2}e^{-t\gamma}n_+ \\ \frac{1}{2}e^{-t\gamma}n_- & \frac{1}{4}e^{-4t\gamma}(e^{2t\gamma}n_-n_+ + (1+n_z)^2) \end{pmatrix},$$

одакле следи израз за извод по времену чистости стања под овим процесом:

$$\dot{p} = -2e^{-4t\gamma}\gamma(1+n_z)^2 - e^{-2t\gamma}\gamma(n_-n_+ - 2(1+n_z)). \qquad (3.44б)$$

За један избор константи процеса, Слика 29 приказује временску зависност $\dot{p}$.



Слика 3.29 Временска зависност израза (3.44б) за: $n_z = 1, n_{\pm} = 0, \gamma = 1$.

Слика 3.29 показује почетно губљење чистости стања, а онда, монотоно опадајући део позитивног дела графика, указује на прочишћење чија се брзина асимптотски смањује у нулу. То описује процес пригушења амплитуде у складу са (3.4з): чак и почетно чисто стање брзо постане мешано, а онда се асимптотски прочишћава до јединственог чистог, стационарног стања – основног стања кубита.

Укупно, изрази (3,44а,б) потврђују општи резултат добијен у задатку 2.30: одсуство пораста чистости стања се може остварити АККО је процес униталан – што јесте случај за први разматрани процес, али не и за процес пригушење амплитуде.

3.45 За двокубитни систем задати су Краусови оператори[33]:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}, \qquad (3.45а)$$

---

[33] arXiv:2005.02976v1.

где: $\gamma = e^{-t/2T}, \omega_1 = \sqrt{1 - e^{-t/T}}, \omega_2 = -e^{-t/T}\sqrt{1 - e^{-t/T}}, \omega_3 = \sqrt{(1 - e^{-t/T})(1 - e^{-2t/T})}$. Испитати Марковљевост процеса задатог Краусовим операторима (3.45а).

Решење: Претпоставимо да је почетно стање пара кубита облика тезорског производа, $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + n_z & n_- \\ n_+ & 1 - n_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 + m_z & m_- \\ m_+ & 1 - m_z \end{pmatrix}$. Тада примена Краусових оператора на почетно стање води једначини за матрицу процеса:

$$A\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+m_z)(1+n_z) \\ \frac{1}{4}m_-(1+n_z) \\ \frac{1}{4}n_-(1+m_z) \\ \frac{m_-n_-}{4} \\ \frac{1}{4}m_+(1+n_z) \\ -\frac{1}{4}(-1+m_z)(1+n_z) \\ \frac{n_-m_+}{4} \\ -\frac{1}{4}n_-(-1+m_z) \\ \frac{1}{4}n_+(1+m_z) \\ \frac{m_-n_+}{4} \\ -\frac{1}{4}(1+m_z)(-1+n_z) \\ -\frac{1}{4}m_-(-1+n_z) \\ \frac{m_+n_+}{4} \\ -\frac{1}{4}n_+(-1+m_z) \\ -\frac{1}{4}m_+(-1+n_z) \\ \frac{1}{4}(-1+m_z)(-1+n_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+m_z)(1+n_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_-(1+n_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_-(1+m_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{2t}{T}}m_-n_- \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_+(1+n_z) \\ -\frac{1}{4}(-1+m_z)(1+n_z) \\ \frac{n_-m_+}{4} \\ -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_-(-1+m_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_+(1+m_z) \\ \frac{m_-n_+}{4} \\ -\frac{1}{4}(1+m_z)(-1+n_z) \\ -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_-(-1+n_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{2t}{T}}m_+n_+ \\ -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_+(-1+m_z) \\ -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_+(-1+n_z) \\ \frac{1}{4}(-1+m_z)(-1+n_z) \end{pmatrix} \qquad (3.45б)$$

одакле се види да је матрица процеса чисто дијагонална. На дијагонали су, наравно, њене својствене вредности, од врха ка дну, редом: $1, e^{-\frac{t}{2T}}, e^{-\frac{2t}{T}}$ које су све ненулте па је отуда процес инвертибилан, као и раздељив. Да бисмо потврдили потпуну позитивност (већ знамо да је процес потпуно позитиван – самим постојањем Краусове операторске форме), морамо увести динамичку матрицу.

Применом поступка успостављеног Задатком 2.31 добија се динамичка матрица процеса:

$$B = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{2t}{T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{-\frac{2t}{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Очекивано, својствене вредности динамичке матрице су ненегативне: $1 - e^{-\frac{2t}{T}}, \frac{1}{2}e^{-\frac{2t}{T}}\left(1 + 3e^{\frac{2t}{T}} \pm \sqrt{1 - 2e^{\frac{2t}{T}} + 12e^{\frac{3t}{T}} + e^{\frac{4t}{T}}}\right)$.

Инверзна матрица процеса, A_{inv}, тривијално следи из матрице A, одакле лако следи матрица процеса за ненулти почетни тренутак:

$$A(t,s) = A(t,0)A_{inv}(s,0) =$$

$$= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e^{\frac{2(s-t)}{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2(s-t)}{T}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Стандардни поступак даје динамичку матрицу за ненулти почетни тренутак:

$$B(t,s)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2(s-t)}{T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{\frac{2(s-t)}{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

чије су све својствене вредности ненегативне: $0,1-e^{\frac{2(s-t)}{T}},\frac{1}{2}e^{-\frac{2t}{T}}\left(e^{\frac{2s}{T}}+3e^{\frac{2t}{T}}\pm\sqrt{e^{\frac{4s}{T}}+e^{\frac{4t}{T}}-2e^{\frac{2(s+t)}{T}}+16e^{\frac{s+3t}{T}}}\right)$, чиме је потврђена потпуна позитивност динамике за ненулти почетни тренутак, а отуда и Марковљевост процеса.

3.46 Испитати динамику појединачних кубита за процес уведен у претходном задатку.

Решење: Улога два кубита у разматраном двокубитном процесу је симетрична. Размотримо зато први кубит, чије стање следи узимањем парцијалног трага по другом кубиту за стање двокубитног система задатог (изоморфно) на д.с. израза (3.45б). Преведено у уобичајени облик, двокубитно стање гласи:

$$\rho =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+m_z)(1+n_z) & \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_-(1+n_z) & \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_-(1+m_z) & \frac{1}{4}e^{-\frac{2t}{T}}m_-n_- \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_+(1+n_z) & -\frac{1}{4}(-1+m_z)(1+n_z) & \frac{n_-m_+}{4} & -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_-(-1+m_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_+(1+m_z) & \frac{m_-n_+}{4} & -\frac{1}{4}(1+m_z)(-1+n_z) & -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_-(-1+n_z) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{2t}{T}}m_+n_+ & -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}n_+(-1+m_z) & -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}m_+(-1+n_z) & \frac{1}{4}(-1+m_z)(-1+n_z) \end{pmatrix},$$

(3.46а)

Стање првог кубита је $\rho_1 = tr_2\rho$. Један начин да се израчуна подсистемско стање је да укупно стање развијемо по алгебри оператора за двокубитни систем: $X_{1i} \otimes X_{2j}, i = 0,1,2,3$, при чему: $X_0 = \frac{I}{\sqrt{2}}$ док $X_1 = \frac{X}{\sqrt{2}}, X_2 = \frac{Y}{\sqrt{2}}, X_3 = \frac{Z}{\sqrt{2}}$, где користимо уобичајене ознаке за Паулијеве операторе (матрице). Тако:

$$\rho = \sum_{i,j} \rho_{ij} X_{1i} \otimes X_{2j},$$

где су константе у развоју $\rho_{ij} = tr\left(\rho X_{1i} \otimes X_{2j}\right)$, па

$$\rho_1 = \sum_i \left(\sum_j \rho_{ij} tr_2 X_{2j}\right) X_{1i}. \qquad (3.46б)$$

Како су сви Паулијеви оператори нултог трага, од израза (3.46б) преостају само чланови са $j = 0$:

$$\rho_1 = (tr_2 X_{20}) \sum_i \rho_{i0} X_{1i}. \qquad (3.46в)$$

Дакле, једино су потребне константе: $\rho_{i0} = tr(\rho X_{1i} \otimes I_2), i = 0,1,2,3$.

Лако следи:

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}, \rho_{10} = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}(n_- + n_+), \rho_{20} = \frac{1}{4}ie^{-\frac{t}{2T}}(n_- - n_+), \rho_{30} = \frac{n_z}{2},$$

што даје за стање првог кубита:

$$\rho_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2T}}(n_- + n_+)X_1 + \frac{1}{4}ie^{-\frac{t}{2T}}(n_- - n_+)Y_1 + \frac{n_z}{2}Z_1\right),$$

што у стандардној Z-репрезентацији даје матрични облик:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+n_z) & \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2T}}n_- \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2T}}n_+ & \frac{1}{2}(1-n_z) \end{pmatrix}. \qquad (3.46г)$$

Како је почетно стање уведено у претходном задатку $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+n_z) & \frac{1}{2}n_- \\ \frac{1}{2}n_+ & \frac{1}{2}(1-n_z) \end{pmatrix}$, очигледно је да је матрица процеса за први кубит дијагонална:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

са ненултим својственим вредностима (на дијагонали), па је процес инвертибилан и растављив.

Динамичка матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{2T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\frac{t}{2T}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

има ненегативне својствене вредности, $0{,}1 \pm e^{-\frac{t}{2T}}$, па је процес потпуно позитиван.

Лако се добија матрица процеса за ненулти почетни тренутак:

$$A(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

чему одговара динамичка матрица

$$B(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{\frac{s-t}{2T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{\frac{s-t}{2T}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

са ненегативним својственим вредностима: $0{,}1 \pm e^{\frac{s-t}{2T}}$. То значи да је процес Марковљев.

3.47 Фазно-коваријантно динамичко пресликавање Φ за један кубит које задовољава једнакост $e^{-iZ\varphi}\Phi[\rho]e^{iZ\varphi} = \Phi\left[e^{-iZ\varphi}\rho e^{iZ\varphi}\right]$ може се представити у општем облику:

$$\Phi[\rho] = \frac{1}{2}\left(I + \lambda n_x X + \lambda n_y Y + (\lambda_z n_z + t_z)Z\right), \qquad (3.47а)$$

са, у општем случају, временски зависним параметрима. Наћи услове под којима је ово пресликавање потпуно позитивно.

Решење: Из (3.47а) лако следи једначина за матрицу процеса:

$$A\begin{pmatrix} 1+n_z \\ n_- \\ n_+ \\ 1-n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t_z+n_z\lambda_z \\ \lambda n_- \\ \lambda n_+ \\ 1-t_z-n_z\lambda_z \end{pmatrix},$$

чијим решавањем се лако добија:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+t_z+\lambda_z) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+t_z-\lambda_z) \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \frac{1}{2}(1-t_z-\lambda_z) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-t_z+\lambda_z) \end{pmatrix}. \qquad (4.37б)$$

Својствене вредности матрице процеса су: $1, \lambda, \lambda_z$. Претпостављајући да ниједан од ових параметара није једнак нули (иначе га не би било у поставци задатка), процес је инвертибилан, па отуда растављив, што гарантује постојање локалне мастер једначине за процес.

Из (4.37б) непосредно следи динамичка матрица:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+t_z+\lambda_z) & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2}(1-t_z-\lambda_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-t_z-\lambda_z) & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-t_z+\lambda_z) \end{pmatrix},$$

чије су својствене вредности: $\frac{1}{2}(1+t_z-\lambda_z), \frac{1}{2}(1+t_z-\lambda_z), \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4\lambda^2+t_z^2}+\lambda_z)$.

Из својствених вредности следе услови за позитивност динамичке матрице, па отуда и за ПП процеса: $\lambda_z - t_z \leq 1$, као и $1+\lambda_z \geq \sqrt{4\lambda^2+t_z^2}, -(1+\lambda_z) \geq \sqrt{4\lambda^2+t_z^2}$. Укупно, ови услови су испуњени када су испуњене једнакости:

$$|\lambda_z| + |t_z| \leq 1, 4\lambda^2 + t_z^2 \leq |1+\lambda_z|^2. \qquad (3.47в)$$

НАПОМЕНА: Видети S. Filippov et al, Lobachevskii Journal of Mathematics **volume 41**, pages 617–630(2020)

3.48 За процес уведен у претходном задатку, претпостављајући да се генератор динамике, тј., линдбладијан, може записати преко деловања на произвољно стање кубита:

$$\mathcal{L}[\rho] = \gamma_+(\sigma_+\rho\sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+,\rho\}/2) + \gamma_-(\sigma_-\rho\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-,\rho\}/2) + \gamma_z(Z\rho Z - \rho), \qquad (3.48а)$$

изразити параметре у (3.48а) преко параметара уведених у (3.47а).

Решење: Као што знамо из Задатка 2.9, постојање мастер једначине захтева постојање инверзног пресликавања. Тада је линдбладијан дефинисан изразом: $\mathcal{L}\big[\rho[t]\big] = \big(\dot{\Phi}[\mathrm{t}]\Phi^{-1}[\mathrm{t}]\big)\big[\rho[t]\big], \forall\rho[t]$. Зато решавање задатка можемо обавити преводом у матричне облике за $\mathcal{L}$ користећи (3.48а), као и на основи $\dot{\Phi}[\mathrm{t}]\Phi^{-1}[\mathrm{t}]$ користећи (3.47а). Изједначавањем тако добијених матрица следиће тражени изрази за непознате параметре γ_+, γ_- и γ_z.

Из израза (3.47б) лако следи инверзна матрица:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1-t_z+\lambda_z}{2\lambda_z} & 0 & 0 & -\frac{1+t_z-\lambda_z}{2\lambda_z}\\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0\\ \frac{-1+t_z+\lambda_z}{2\lambda_z} & 0 & 0 & \frac{1+t_z+\lambda_z}{2\lambda_z}\end{pmatrix},$$

као и извод матрице процеса по времену:

$$\dot{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{t}_z+\dot{\lambda}_z & 0 & 0 & \dot{t}_z-\dot{\lambda}_z\\ 0 & 2\dot{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\dot{\lambda} & 0\\ -(\dot{t}_z+\dot{\lambda}_z) & 0 & 0 & -(\dot{t}_z-\dot{\lambda}_z)\end{pmatrix}.$$

Користећи ове изразе добија се матрична репрезентација за $\dot{\Phi}[\mathrm{t}]\Phi^{-1}[\mathrm{t}]$:

$$\dot{A}A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(\dot{t}_z-\frac{(-1+t_z)\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\dot{t}_z-\frac{(1+t_z)\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}\right)\\ 0 & \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} & 0\\ \frac{1}{2}\left(-\dot{t}_z+\frac{(-1+t_z)\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(-\dot{t}_z+\frac{(1+t_z)\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}\right)\end{pmatrix}. \qquad (3.48б)$$

Сада, користећи (3.48а) добија се следећа матрична репрезентација за линдбладијан:

$$B=\begin{pmatrix}-\gamma_- & 0 & 0 & \gamma_+\\ 0 & \frac{1}{2}(-\gamma_- -\gamma_+ -4\gamma_z) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\gamma_- -\gamma_+ -4\gamma_z) & 0\\ \gamma_- & 0 & 0 & -\gamma_+\end{pmatrix}. \qquad (3.48в)$$

Изједначавањем два израза за матричну репрезентацију линдбладијана, (3.47б) и (3.47в), следе изрази за тражене параметре који се појављују у изразу (3.48а):

$$\gamma_{\pm} = \frac{\lambda_z}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1 \pm \mathrm{t_z}}{\lambda_z}\right), \gamma_z = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\ln\frac{\lambda_z}{\lambda^2}. \tag{3.48г}$$

3.49 Испитати Марковљевост процеса (3.47а) за следеће изборе параметара: (а) $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{(1+e^{-2\nu t})^2 - a^2(1-e^{-2\nu t})^2}, \lambda_z = e^{-2\nu t}$, $t_z = a(1-e^{-2\nu t}), |a| < 1, \nu > 0$ и (б) $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{(1+e^{-2\nu t})^2 - b^2 e^{-2\nu t}(1-e^{-2\nu t})^2}, \lambda_z = e^{-2\nu t}$, $t_z = be^{-\nu t}(1-e^{-2\nu t}), b \in (0,1], \nu > 0.$

Решење: Из израза (3.47б) лако следи израз за инверзну динамичку матрицу, а отуда израз за динамичку матрицу за ненулти почетни тренутак s:

$$A(t,s) = A(t)A^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + t_z[t] - \frac{(-1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1 + t_z[t] - \frac{(1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) \\ 0 & \frac{\lambda[t]}{\lambda[s]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda[t]}{\lambda[s]} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 - t_z[t] + \frac{(-1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1 - t_z[t] + \frac{(1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.49а}$$

где угласте заграде стоје ради боље прегледности и истичу зависност од временских тренутака t и s.

Одговарајућа динамичка матрица:

$$B(t,s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(1 + t_z[t] - \frac{(-1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) & 0 & 0 & 2\frac{\lambda[t]}{\lambda[s]} \\ 0 & \left(1 + t_z[t] - \frac{(1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - t_z[t] + \frac{(-1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) & 0 \\ 2\frac{\lambda[t]}{\lambda[s]} & 0 & 0 & \left(1 - t_z[t] + \frac{(1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right) \end{pmatrix} \tag{3.49б}$$

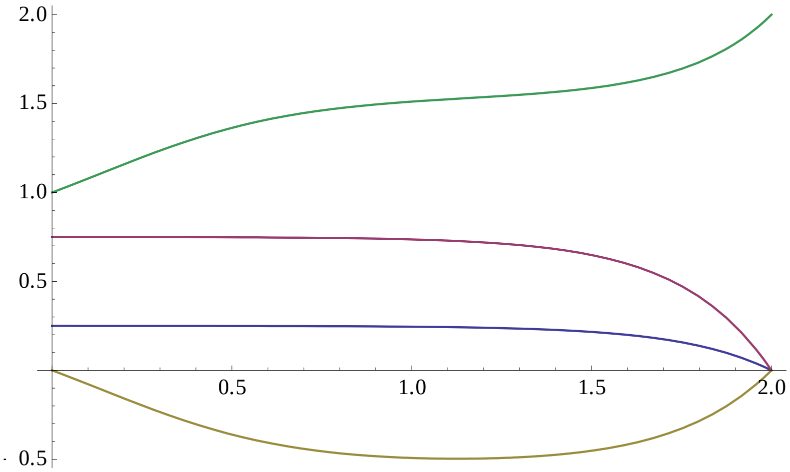
има следеће својствене вредности: $\frac{1}{2}\left(1 - t_z[t] + \frac{(-1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}\right), 1 + t_z[t] - \frac{(1+t_z[s])\lambda_z[t]}{\lambda_z[s]}$,

$$\frac{\lambda[s]^2\lambda_z[s]^2 + \lambda[s]^2\lambda_z[s]\lambda_z[t] - \sqrt{4\lambda[s]^2\lambda[t]^2\lambda_z[s]^4 + \lambda[s]^4 t_z[t]^2\lambda_z[s]^4 - 2\lambda[s]^4 t_z[s]t_z[t]\lambda_z[s]^3\lambda_z[t] + \lambda[s]^4 t_z[s]^2\lambda_z[s]^2\lambda_z[t]^2}}{2\lambda[s]^2\lambda_z[s]^2},$$

$$\frac{\lambda[s]^2\lambda_z[s]^2+\lambda[s]^2\lambda_z[s]\lambda_z[t]+\sqrt{4\lambda[s]^2\lambda[t]^2\lambda_z[s]^4+\lambda[s]^4t_z[t]^2\lambda_z[s]^4-2\lambda[s]^4t_z[s]t_z[t]\lambda_z[s]^3\lambda_z[t]+\lambda[s]^4t_z[s]^2\lambda_z[s]^2\lambda_z[t]^2}}{2\lambda[s]^2\lambda_z[s]^2}.$$

Процес ће бити Марковљев ако је динамичка матрица позитивна.

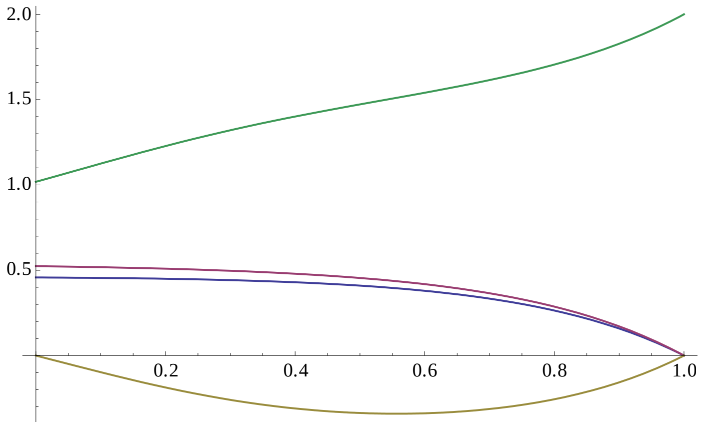
(а) Лако се показује да дати избор параметара задовољава једнакост у (3.47в). Сменом у (3.49б) добијају се својствене вредности од којих је једна негативна, као што се види са Слике 3.30.



Слика 3.30 Својствене вредности динамичке матрице (3.49б) за избор параметара (а), за: $t = 2, s \in [0,2], a = \frac{1}{2}, \nu = 2$.

са које се види да је за одређени временски интервал та вредност негативна. То значи да процес није Марковљев. До овог закључка се долази и провером временске зависности функција пригушења у (4.38а). Наиме, коришћењем (3.48г), лако се види да је $\gamma_z(t) < 0, \forall t$.

(б) Као и за претходни случај, избор параметара даје једнакост у (3.49в). Сменом у (3.49б) добија се једна негативна својствена вредност, као што се види на Слици 3.31.



Слика 3.31 Својствене вредности динамичке матрице (3.49б) за избор параметара (б), за: $t = 1, s \in [0,1], b = \frac{1}{2}, \nu = 2$.

На слици се јасно види да је једна својствена вредност негативна у сваком тренутку, те води непозитивности динамичке матрице - што говори о немарковљевом карактеру пресликавања. Као и у случају (а), до овог закључка се долази и провером временске зависности функција пригушења у (4.38а). Наиме, коришћењем (3.48г), лако се види да је $\gamma_z(t) < 0, \forall t$.

НАПОМЕНА: Занимљиво је уочити да за изборе $a = 0 = b$ следи $t_z = 0$, па динамика (3.47а) постаје унитална, али, како читалац сада може лако проверити по аналогији са сликама 30 и 31, не и Марковљева.

Посебни задаци

4.1 Двонивоски атом се налази под утицајем ласера чије се временски периодично електромагнетно поље може сматрати класичним спољашњим потенцијалом за атом. Одабрати математички најједноставнији модел за ову ситуацију и решити Шредингерову једначину за атом под претпоставком резонанције атомских прелаза са фреквенцијом ласерског поља.

Решење: Хамилтонијан атома, по претпоставци, има спектралну форму:

$$H_0 = E_1 P_1 + E_0 P_0, \tag{4.1a}$$

где су $P_i, i = 0{,}1$ својствени пројектори. С обзиром да су од интереса само два нивоа, нпр., основни E_0 и побуђени ниво E_1, алгебра оператора је изоморфна алгебри спина ½ (то јест, кубита). Како се спољашње ЕМ поље сматра класичним, тј., адитивним делом хамилтонијана система (тј., атома), овде се ради о атому као затвореном систему (видети Задатак 3.16). Наравно, тада процеси (де)екситације атома, начелно, нису могући (видети Задатак 3.11). Алтернатива би могла бити да се, руком унесу, процеси „квантних скокова“, али то би од атома, уместо затвореног система, донело атом као отворени систем – у нескладу са поставком задатка. Зато је овде једина могућност промене стања атома да ласерско поље буде моделовано алгебарски некомутативно у односу на (4.1а). Наравно, није се тешко досетити: познајући алгебру Паулијевих оператора, ако се хамилтонијан представи преко Паулијевог Z оператора (својственог базиса $|0\rangle, |1\rangle$), онда се ласерско поље може моделовати преко X Паулијевог оператора (сваки избор је, дакле, цикличан по пермутацији оператора). То јест, оператор X пребацује својствена стања Z једног у други, па је најједноставнији избор за модел.

У енергијској репрезентацији сопственог хамилтонијана атома, спектрална форма (4.1а) је дата дијагоналном матрицом:

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \tag{4.1б}$$

која се може преписати у облик:

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = \frac{E_0+E_1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{E_0-E_1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.1в}$$

Занемаривањем првог члана у (4.1в), операторски облик хамилтонијана (4.1а) гласи:

$$H_0 = -\frac{\Delta}{2} Z. \tag{4.1г}$$

Тада, сходно горе реченом, ласерско поље се може одабрати у операторском облику:

$$V = 2A\cos(\omega t + \varphi)\, X,$$

па је хамилтонијан атома у пољу ласера дат изразом:

$$H = -\frac{\Delta}{2} Z + 2A\cos(\omega t + \varphi)\, X, \tag{4.1д}$$

што у стандардној Z-репрезентацији има матрични облик:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & 2A\cos(\omega t + \varphi) \\ 2A\cos(\omega t + \varphi) & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.1ђ}$$

Како је хамилтонијан (4.1ђ) временски зависан, задатак је решити временски зависну Шредингерову једначину (ШЈ).

Егзактно решење временски зависне ШЈ за хамилтонијан (4.1ђ) није познато. Зато се мора увести нека апроксимација. Ниже ће бити уведена апроксимација која се назива *RWA* (*Rotating Wave Approximation*) *за хамилтонијан* система.

Временска зависност хамилтонијана потиче од косинусног члана. Записујући косинусну функцију преко Ојлерове формуле:

$$2\cos(\omega t+\varphi)=e^{i(\omega t+\varphi)}+e^{-i(\omega t+\varphi)}=e^{i(\omega t+\varphi)}\left(1+e^{-2i(\omega t+\varphi)}\right), \tag{4.1е}$$

и сматрајући да други члан у загради даје „превише брзу промену“ у времену, *RWA-за-хамилтонијан* гласи:

$$2\cos(\omega t+\varphi)\approx e^{i(\omega t+\varphi)}. \tag{4.1ж}$$

Сменом (4.1ж) у (4.1ђ) даје нови израз за хамилтонијан:

$$H'=\begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & Ae^{i(\omega t+\varphi)} \\ Ae^{-i(\omega t+\varphi)} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.1з}$$

где су вандијагонални елементи одабрани тако да хамилтонијан сачува ермитичност.

Сада се испоставља да је лако решити нестационарну ШЈ за хамилтонијан H' $(h=1)$, коришћењем поступка представљеног у Задатку 2.25:

$$i\frac{d}{dt}\psi=H'\psi. \tag{4.1и}$$

Наиме, уместо решавања (4.1и), лакше је решити алтернативну Шредингерову једначину:

$$i\frac{d}{dt}\varphi=H''\varphi, \tag{4.1ј}$$

при чему: (а) $\varphi=U\psi$ за неко унитарно U, и (б) нови хамилтонијан, H'', који се, сходно Задатку 2.25 може одабрати да буде временски независан, задовољава са H' једнакост (2.24г), тј., важи $H''=i\dot{U}U^{+}+UH'U^{+}$.

Одаберимо унитарни оператор у матричном облику:

$$U=\begin{pmatrix} e^{if_1} & 0 \\ 0 & e^{if_2} \end{pmatrix},$$

што даје:

$$H'' = i\begin{pmatrix} i\frac{df_1}{dt}e^{if_1} & 0 \\ 0 & i\frac{df_2}{dt}e^{if_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-if_1} & 0 \\ 0 & e^{-if_2} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} e^{if_1} & 0 \\ 0 & e^{if_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & Ae^{i(\omega t+\varphi)} \\ Ae^{-i(\omega t+\varphi)} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-if_1} & 0 \\ 0 & e^{-if_2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{df_2}{dt} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & Ae^{i(\omega t+\varphi-f_2+f_1)} \\ Ae^{-i(\omega t+\varphi-f_2+f_1)} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}. \qquad (4.1к)$$

Елиминација временске зависности, $\omega t + \varphi - f_2 + f_1 = 0$, води избору, нпр., $f_2 = \frac{(\omega t+\varphi)}{2} = -f_1$, што сменом у (4.1к) даје:

$$H'' = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta-\omega}{2} & A \\ A & \frac{\Delta-\omega}{2} \end{pmatrix}. \qquad (4.1л)$$

Сада се Шредингерова једначина (4.1ј) може поједноставити: одаберимо услов резонанције, тј., да је $\Delta = \omega$.

Тада (4.1ј) има очигледно операторско решење:

$$\varphi(t) = e^{-iAXt}\varphi(0), \qquad (4.1љ)$$

где је X одговарајућа Паулијева матрица.

Инверзна унитарна трансформација даје решење Шредингерове једначине (4.1и):

$$\psi(t) = U^{+}e^{-iAXt}\varphi(0) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{(\omega t+\varphi)}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(\omega t+\varphi)}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos At & -i\sin At \\ -i\sin At & \cos At \end{pmatrix}\psi(0) =$$

$$e^{i\frac{(\omega t+\varphi)}{2}}\begin{pmatrix} \cos At & -i\sin At \\ -ie^{-i(\omega t+\varphi)}\sin At & e^{-i(\omega t+\varphi)}\cos At \end{pmatrix}\psi(0).\equiv$$

$$\begin{pmatrix} \cos At & -i\sin At \\ -ie^{-i(\omega t+\varphi)}\sin At & e^{-i(\omega t+\varphi)}\cos At \end{pmatrix}\psi(0), \qquad (4.1м)$$

где је у последњем кораку коришћен први постулат квантне механике за фазу стања, као и услов $\phi(0) = \psi(0)$.

Ако је почетно стање, у истој репрезентацији:

$$\psi(0) = \binom{1}{0}, \tag{4.1н}$$

тада решење (4.1м) постаје алгебарског облика који садржи, тзв., кохерентне (тзв., Рабијеве) осцилације:

$$|\psi(t)\rangle = \cos At\,|1\rangle + e^{-i(\omega t+\varphi+\pi/2)}\sin At\,|0\rangle. \tag{4.1њ}$$

Овај третман атома као изолованог система би требало допунити резултатима и напоменама датим у Задатку 3.11, док третман ласерског поља као класичног система је обрађен у Задацима 3.15 и 3.16. Реалнији модели атома и ласерског поља ће постепено бити дати почев од следећег задатка, а посебно од Задатка 4.7.

НАПОМЕНА: „*RWA*-за-хамилтонијан“ је кључни корак у решавању нестационарне Шредингерове једначине (остале претпоставке поједностављују решења, али нису неопходне за решивост једначине). Тиме се хамилтонијан система преводи у погоднији облик са којим се може рачунати. Егзактни хамилтонијан (4.1д,ђ), сва је прилика, даје *неинтеграбилни* систем, тј., не омогућује увођење константи кретања – иако строги доказ за овај став није познат. У сваком случају, хамилтонијан не комутира са самим собом за различите тренутке времена, тј., $[H(t), H(t')] \neq 0$ за $t \neq t'$, па је његов спектрални облик зависан од времена, $H(t) = \sum_n h_{nt} P_{nt}\,, P_{nt}P_{n't} = P_{nt}\delta_{nn'}$, где последње не мора да важи за различите тренутке. За такве опсервабле се каже да нису *non-demolition* врсте. Штавише, (4.1д) не омогућује примену поступка дефинисаног изразом (4.1ј). Третман ласерског поља као класичног је врло чест[34] у квантној оптици (видети и Задатак 4.7), али са ограниченом корисношћу резултата у оквиру таквих, полукласичних, модела.

---

[34] M. O. Sculy and M. Suhail Zubairy, “Quantum Optics”, Cambridge Univ. Press, 1997; M. Fleischhauer et al, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005).

4.2 Решити Шредингерову једначину за двонивоски атом у спољашњем ласерском пољу при чему хамилтонијан изолованог сложеног система „атом+поље“ гласи:

$$H = \frac{\Omega}{2} Z \otimes I + \omega I \otimes N + 2gX \otimes (a + a^+), \qquad (4.2а)$$

где се појављују Босе-оператори a и a^+, док је $N = a^+ a$ за једини мод ласерског поља.

Решење: Сада је систем „атом+поље“ изолован систем. Овде ласерско поље представља квантни (динамички) систем који се не може свести на спољашњи потенцијал за атом (видети Задатак 3.16). Овде ћемо усвојити поступак аналоган поступку из претходног задатка.

Пишући $X = \sigma_+ + \sigma_-$, тј., уводећи спинске операторе подизања и спуштања, ШЈ је облика:

$$i \frac{d}{dt} \psi = \left(\frac{\Omega}{2} Z \otimes I + \omega I \otimes N + 2g(\sigma_+ + \sigma_-) \otimes (a + a^+) \right) \psi, \qquad (4.2б)$$

за коју егзактна решења нису позната.

Зато, по аналогији са претходним задатком, очекујемо да би увођење *RWA* поједноставило хамилтонијан, а тиме и једначину (4.2б). Следећи поступак се обично користи у квантној оптици и представља *RWA-за-хамилтонијан*:

$$(\sigma_+ + \sigma_-) \otimes (a + a^+) \approx (\sigma_+ \otimes a + \sigma_- \otimes a^+), \qquad (4.2в)$$

што преписује хамилтонијан у облик који се назива Џејнс-Камингсовим (видети напомену уз Задатак 3.33); строжији поступак биће представљен у следећем задатку. Отуда следећи облик ШЈ за атом+поље:

$$i \frac{d}{dt} \psi = \left(\frac{\Omega}{2} Z \otimes I + \omega I \otimes a^+ a + 2g(\sigma_+ \otimes a + \sigma_- \otimes a^+) \right) \psi \equiv H' \psi. \qquad (4.2г)$$

Прелазак у интеракциону слику унитарним оператором $e^{i\Omega t Z/2} \otimes e^{it\omega N}$ одмах даје, ниже дат, израз (4.2з) уз услов резонанције, а отуда и одговарајућа решење (4.2и). Ипак, овде ће даљи рад бити по аналогији са претходним задатком, опет у методологији Задатка 2.25. Зато уведимо унитарни оператор за (4.2г), овога пута у облику:

$$U = e^{i\omega t Z/2} \otimes e^{it\omega N} \equiv V \otimes W. \qquad (4.2д)$$

Тада за стање $\phi = U\psi$ лако следи Шредингерова једначина:

$$i\frac{d}{dt}\phi = \left(UH'U^{+} + i\frac{dU}{dt}U^{+}\right)\phi. \qquad (4.2ђ)$$

Коришћењем (4.2г), као и једнакости:

$$WaW^{+} = e^{-i\omega t}a,\ Wa^{+}W^{+} = e^{i\omega t}a^{+}, \qquad (4.2е)$$

после једноставног рачуна који даје, нпр., $e^{i\omega t Z/2}\sigma_{+}e^{-i\omega t Z/2} = e^{i\omega t}\sigma_{+}$, следи:

$$UH'U^{+} + i\frac{dU}{dt}U^{+} = \frac{\Omega-\omega}{2}Z \otimes I + 2g(\sigma_{+} \otimes a + \sigma_{-} \otimes a^{+}), \qquad (4.2ж)$$

те ШЈ (4.2ђ) добија облик:

$$i\frac{d}{dt}\phi = \left(\frac{\Omega-\omega}{2}Z \otimes I + 2g(\sigma_{+} \otimes a + \sigma_{-} \otimes a^{+})\right)\phi \qquad (4.2з)$$

који се може решити.

Размотримо, поново, услов резонанције, $\Omega - \omega = 0$. Тада решење (4.2з) очигледно гласи:

$$\phi(t) = e^{2itg(\sigma_{+}\otimes a + \sigma_{-}\otimes a^{+})}\phi(0). \qquad (4.2и)$$

Израчунајмо квадрат оператора у експоненту:

$$(\sigma_{+} \otimes a + \sigma_{-} \otimes a^{+})^{2} = \sigma_{+}\sigma_{-} \otimes aa^{+} + \sigma_{-}\sigma_{+} \otimes a^{+}a = |1\rangle\langle 1| \otimes I + I \otimes N.$$

Отуда:

$$(\sigma_{+} \otimes a + \sigma_{-} \otimes a^{+})^{2n} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(I \otimes N)^{n-p}(|1\rangle\langle 1| \otimes I)^{p} = I \otimes N^{n} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}(I \otimes N)^{n-p}(|1\rangle\langle 1| \otimes I)^{p} = I \otimes N^{n} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}N^{n-p} = I \otimes N^{n} + |1\rangle\langle 1| \otimes [(I+N)^{n} - N^{n}] = |0\rangle\langle 0| \otimes N^{n} + |1\rangle\langle 1| \otimes (I+N)^{n}, \qquad (4.2j)$$

где су коришћене комутационе релације за Бозе операторе и добро познати резултати за суме са биномним коефицијентима.

Сада се унитарни оператор из (4.2и) може развити по парним и непарним члановима:

$$e^{2itg(\sigma_+\otimes a+\sigma_-\otimes a^+)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2gt)^{2n}}{(2n)!}[|0\rangle\langle 0|\otimes N^n + |1\rangle\langle 1|\otimes (I+N)^n] + i(\sigma_+\otimes a+\sigma_-\otimes a^+)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2gt)^{2n+1}}{(2n+1)!}[|0\rangle\langle 0|\otimes N^n + |1\rangle\langle 1|\otimes (I+N)^n].$$

(4.2к)

Сређивање другог члана даје коначан израз за унитарни оператор, уз коришћење једнакости $\left(\sqrt{N}\right)^{2n} = N^n$:

$$e^{2itg(\sigma_+\otimes a+\sigma_-\otimes a^+)} = |0\rangle\langle 0|\otimes \cos\left(2gt\sqrt{N}\right) + |1\rangle\langle 1|\otimes \cos\left(2gt\sqrt{I+N}\right) + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2gt)^{2n+1}}{(2n+1)!}[|1\rangle\langle 0|\otimes aN^n + |0\rangle\langle 1|\otimes a^+(I+N)^n]. \quad (4.2л)$$

Други члан се може и додатно средити, али уз једно ограничење. Користећи $N^n = \frac{\left(\sqrt{N}\right)^{2n+1}}{\sqrt{N}}$, као и аналогни израз сменом N са $(I+N)$, следи једнакост:

$$e^{2itg(\sigma_+\otimes a+\sigma_-\otimes a^+)} = |0\rangle\langle 0|\otimes \cos\left(2gt\sqrt{N}\right) + |1\rangle\langle 1|\otimes \cos\left(2gt\sqrt{I+N}\right) + i\left(|1\rangle\langle 0|\otimes a\frac{\sin\left(2gt\sqrt{N}\right)}{\sqrt{N}} + |0\rangle\langle 1|\otimes a^+\frac{\sin\left(2gt\sqrt{I+N}\right)}{\sqrt{I+N}}\right), \quad (4.2м)$$

која (за разлику од израза (4.2л)) није добро дефинисана за бозонско стање $|0\rangle$.

Размотримо почетно стање $|1\rangle\otimes|0\rangle$, што физички одговара побуђеном атому у вакууму. Тада (4.2и) и (4.2л) дају (све у Дираковим ознакама):

$$|\phi(t)\rangle = e^{2itg(\sigma_+\otimes a+\sigma_-\otimes a^+)}|1\rangle\otimes|0\rangle = \cos(2gt)\,|1\rangle\otimes|0\rangle + i\sin(2gt)\,|0\rangle\otimes|1\rangle. \quad (4.2н)$$

Повратак у Шредингерову слику, сходно (4.2д), даје решење ШЈ, израз (4.2г):

$$|\phi_S(t)\rangle = \cos(2gt)\, e^{-i\omega t Z/2} \otimes e^{-it\omega N}|1\rangle \otimes |0\rangle + i\sin(2gt)\, e^{-i\omega t Z/2} \otimes e^{-it\omega N}|0\rangle \otimes |1\rangle = \cos(2gt)\,|1\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\pi/2}\sin(2gt)\,|0\rangle \otimes |1\rangle, \quad (4.2њ)$$

где је, сходно првом постулату квантне механике, занемарена глобална „фаза“ $e^{-i\omega t/2}$.

За разлику од претходног задатка, у овом задатку атом је разматран као отворени систем, чије (наравно, мешано) стање се добија узимањем трага по стањима ЕМ поља:

$$\rho_{atom} = tr_{EM}(|\phi_S(t)\rangle\langle\phi_S(t)|) = \cos^2(2gt)\,|1\rangle\langle 1| + \sin^2(2gt)\,|0\rangle\langle 0|.$$

Наравно, претпоставка да окружење атома чини једномодно ЕМ поље није физички реална. Отуда је овај задатак један корак ка реалном моделу који је предмет више задатака, почев од Задатка 4.7.

НАПОМЕНА: *RWA*-за-хамилтонијан, дата изразом (4.2в), је типичан поступак у квантној оптици. Ипак, за тај поступак се *зна да је непоуздан*, у смислу да може водити погрешним облицима мастер једначине за атомске (унутрашње) степене слободе[35]. За разлику од ове врсте, алтернативна *RWA* која се уводи после узимања трага по окружењу, може се сматрати поузданим поступком. Ипак, *једини систематични поступак* у овом смислу је примена, тзв., *секуларне апроксимације* под претпоставком слабе интеракције отвореног система са окружењем (видети Задатак 1.14); формално, све је исто као и за поменути *RWA* поступак, али се и појмовно, и у поступку, све обавља усклађено и јасно, тј., нема „руком уписаних“ (*ad hoc*) услова [2]. Вреди истаћи да се ограничење израза (4.2м) не види у матричној репрезентацији првог фактор простора стања. Наиме, у стандардној Z-репрезентацији, израз (4.2н), уз коришћење (4.2м), добија облик (често коришћен у неким уџбеницима квантне оптике):

$$|\phi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(2gt\sqrt{N+I}\right) & ia\frac{sin\left(2gt\sqrt{N}\right)}{\sqrt{N}} \\ ia^{+}\frac{sin\left(2gt\sqrt{I+N}\right)}{\sqrt{I+N}} & \cos\left(2gt\sqrt{N}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |0\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(2gt\sqrt{N+I}\right)|0\rangle \\ ia^{+}\frac{sin\left(2gt\sqrt{I+N}\right)}{\sqrt{I+N}}|0\rangle \end{pmatrix} =$$

$\cos\left(2gt\sqrt{N}\right)|1\rangle \otimes |0\rangle + i\sin(2gt)|0\rangle \otimes |1\rangle$, што је израз (4.2њ).

4.3 Извести облик интеракције двонивоског атома у диполној апроксимацији са вишемодним спољашњим електромагнетним пољем као квантним окружењем атома, и преласком на интеракциону слику спровести *RWA*-за-хамилтонијан.

---

[35] G. S. Agarwal, Phys. Rev. A **7**, 1995 (1973); C. Fleming et al, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 405304 (2010).

Решење: Овде је електромагнетно поље у улози окружења атома, тј., сложени систем „атом+поље“ чини изоловани систем. Купловање дипола атома, $\vec{D}$, са спољашњим електричним пољем, $\vec{E}$, је, у разматраном моделу, интеракција атома са електромагнетним пољем:

$$H_{int} = -\vec{D} \cdot \vec{E}. \tag{4.3а}$$

Слободно квантно електрично поље (без слободних носилаца наелектрисања) се може одабрати у облику:

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \sqrt{\frac{2\pi h\omega_k}{V}} \vec{e}_r(\vec{k})\left(b_r(\vec{k}) + b_r^+(\vec{k})\right). \tag{4.3б}$$

Да бисмо моделовали двонивоски атом, преузећемо познате изразе за електрични дипол, у смислу да су дијагонални елементи дипола једнаки нули. Записано у дводимензионалном простору (модел двонивоског атома), може се одабрати:

$$\langle i|\vec{D}|j\rangle = \vec{d}\left(1 - \delta_{ij}\right), i, j = 0,1. \tag{4.3в}$$

Сада, поштујући (4.3в), изаберимо облик за диполни момент:

$$\vec{D} = \vec{d}\sigma_- + \vec{d}^*\sigma_+, \tag{4.3г}$$

где је $\vec{d}$ константни, у општем случају комплексни, вектор. Тако (4.3а) добија облик:

$$H_{int} = -\sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} \sqrt{\frac{2\pi h\omega_k}{V}} \left(\vec{e}_r(\vec{k}) \cdot \vec{d}\sigma_- + \vec{e}_r(\vec{k}) \cdot \vec{d}^*\sigma_+\right) \otimes \left(b_r(\vec{k}) + b_r^+(\vec{k})\right). \tag{4.3д}$$

Прелаз на интеракциону слику, $\widetilde{H}_{int} = e^{iH_0t/h} H_{int} e^{-iH_0t/h}$, задат је у односу на сопствени хамилтонијан[36] целине изразом:

$$H_0 = \frac{h\omega_0}{2} Z \otimes I + I \otimes \sum_{\vec{k}} \sum_{r=1,2} h\omega_k\, b_r^+(\vec{k}) b_r(\vec{k}). \tag{4.3ђ}$$

Комутирање свих оператора у (4.3ђ) води тензорском производу унитарних оператора:

$$e^{iH_0t/h} = e^{it\omega_0 Z/2} \otimes \Pi_{\vec{k},r} e^{it\omega_k b_r^+(\vec{k}) b_r(\vec{k})} \equiv V \otimes W. \tag{4.3е}$$

Тако сада интеракциони хамилтонијан у интеракционој слици добија облик:

---

[36] Алтернативе у овом смислу су могуће за сложене отворене системе, тј., за отворене системе који имају своје делове, подсистеме [2], а као пример у овом смислу видети задатак 4.9.

$$\widetilde{H}_{int} = -\sum_{\vec{k}}\sum_{r=1,2}\sqrt{\frac{2\pi h\omega_k}{V}}\left(\vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}(V\sigma_-V^+) + \vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}^*(V\sigma_+V^+)\right)\otimes \left(Wb_r(\vec{k})W^+ + Wb_r^+(\vec{k})W^+\right) = -i\sum_{\vec{k}}\sum_{r=1,2}\sqrt{\frac{2\pi h\omega_k}{V}}\left(\vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}(V\sigma_-V^+) + \vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}^*(V\sigma_+V^+)\right)\otimes\left(e^{it\omega_k b_r^+(\vec{k})b_r(\vec{k})}\left(b_r(\vec{k}) + b_r^+(\vec{k})\right)e^{-it\omega_k b_r^+(\vec{k})b_r(\vec{k})}\right). \tag{4.3ж}$$

Комутациони изрази, $[Z,\sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$, уз коришћење Бејкер-Хаусдорфове леме, лако дају: $V\sigma_\pm V^+ = e^{\pm i\omega_0 t}\sigma_\pm$, што уз (4.2е), записано за свако r і $\vec{k}$, сменом у (4.3ж) даје:

$$\widetilde{H}_{int} = -\sum_{\vec{k}}\sum_{r=1,2}\sqrt{\frac{2\pi h\omega_k}{V}}\left(\left(\vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}\right)e^{-i\omega_0 t}\sigma_- + \left(\vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}^*\right)e^{i\omega_0 t}\sigma_+\right)\otimes \left(e^{-it\omega_k}b_r(\vec{k}) + e^{it\omega_k}b_r^+(\vec{k})\right). \tag{4.3з}$$

Из (4.3з) је очигледно да чланови $\sigma_- b_r(\vec{k})e^{-i(\omega_0+\omega_{\text{к}})t}$ и $\sigma_+ b_r^+(\vec{k})e^{i(\omega_0+\omega_{\text{к}})t}$ осцилују брже од чланова $\sigma_+ b_r(\vec{k})e^{-i(\omega_0-\omega_{\text{к}})t}$ и $\sigma_- b_r^+(\vec{k})e^{i(\omega_0-\omega_{\text{к}})t}$. Зато се одбацивањем „брзих“ чланова, што је овде *RWA*-за-хамилтонијан, добија *RWA* облик хамилтонијана интеракције у интеракционој слици:

$$\widetilde{H}_{int}^{RWA} = -\sum_{\vec{k}}\sum_{r=1,2}\sqrt{\frac{2\pi h\omega_k}{V}}\left(\left(\vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}^*\right)\sigma_+ b_r(\vec{k})e^{-i(\omega_0-\omega_k)t} + \left(\vec{e}_r(\vec{k})\cdot\vec{d}\right)\sigma_- b_r^+(\vec{k})e^{i(\omega_0-\omega_k)t}\right). \tag{4.3и}$$

Повратак на Шредингерову слику, наравно, укида временску зависност у (4.3и) те даје коначан резултат који је уопштење десне стране израза (4.2в) на више модова бозонског окружења.

Овај задатак проширује претходна два задатка, у смислу да даје општу микроскопску основу за динамику двонивоског атома у интеракцији са спољашњим ЕМ пољем – тј., води *квантној оптичкој мастер једначини*, видети Задатак 3.11, као и [4].

НАПОМЕНА: Одбачени чланови из (4.3з) се некада називају анти-Џејнс-Камингсовим. Због неодржања енергије, ови чланови се сматрају „нефизичким“. Али видети Задатак 4.16.

4.4 За двонивоски атом описан квантно-оптичком мастер једначином наћи стање које је чисто у сваком тренутку, користећи резултат Задатка 2.14.

Решење: Мастер једначина за атом у контакту са топлотним купатилом којег чини топлотно уравнотежено („термализовано“) ЕМ поље је, тзв., *квантна оптичка мастер једначина* (у интеракционој слици, уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја) [4], феноменолошки наслућена у Задатку 3.11:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma_0(n(\omega_0)+1)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right) + \gamma_0 n(\omega_0)\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+,\rho\}\right), \tag{4.4а}$$

са тамо датим значењима константи, док су $\sigma_\pm$ оператори подизања и снижења у формализму спина-1/2; диполна интеракција даје $\gamma_0 = 4\omega_0^3\left|\vec{d}\right|^2/3hc^3$.

У Задатку 2.14 је доказано важење једнакости (2.14а) за *сваку* Марковљеву динамику ако је *стање чисто у сваком тренутку*:

$$\sum_i tr(\rho L_i)\, tr(\rho L_i^+) = tr(\rho \sum_i L_i^+\, L_i). \tag{4.4б}$$

Из (4.4а) следе Линдбладови оператори: $\sqrt{\gamma_0(n(\omega_0)+1)}\sigma_-$ и $\sqrt{\gamma_0 n(\omega_0)}\sigma_+$, што сменом у (4.4б), лако даје (ставимо $n(\omega_0)\equiv N$):

$$(N+1)|\langle +|\varphi\rangle|^2 + N(1-|\langle +|\varphi\rangle|^2) = (2N+1)|\langle +|\varphi\rangle|^2(1-|\langle +|\varphi\rangle|^2), \tag{4.4в}$$

где је $|\varphi\rangle$ претпостављено чисто стање, а $|+\rangle$ побуђено стање сопственог хамилтонијана атома $\left(\sigma_\pm|\mp\rangle = \begin{cases}|\pm\rangle \\ 0\end{cases}\right)$.

Да би чисто стање $|\varphi\rangle$ могло бити решење мастер једначине (4.4а), *мора* важити једнакост (4.4в). Стављајући $|\langle +|\varphi\rangle|^2 \equiv p_+$, лако се види да једино реално решење квадратне једначине (4.4в) гласи: $p_+ = 0$, што због $N \geq 0$ има само једно решење, $N = 0$. То јест, једино чисто стање које задовољава Марковљев услов (4.4б) је основно стање $|-\rangle$ на нула Келвина, а оно је стационарно стање за процес – не мења се са временом.

4.5 Као у претходном задатку, али за модел пригушеног хармонијског осцилатора.

Решење: мастер једначина за пригушени (линеарни) хармонијски осцилатор дата је изразом (3.32а):

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\omega_0[a^+a,\rho] + \gamma(N+1)\left(a\rho a^+ - \frac{1}{2}\{a^+a,\rho\}\right) + \gamma N\left(a^+\rho a - \frac{1}{2}\{aa^+,\rho\}\right), \tag{4.5а}$$

где је $N = (exp(\omega_0/k_B T) - 1)^{-1}$ средњи број бозона за један мод фреквенције ω_0 на температури топлотног купатила T. Одатле је очигледно да су Линдбладови оператори (у облику коришћеном у Задатку 2.14): $\sqrt{(N+1)}a$ и $\sqrt{N}a^+$. Сменом у израз (4.4б) се лако добија:

$$\langle a^+a\rangle + \frac{N}{2N+1} = \langle a\rangle\langle a^+\rangle, \tag{4.5б}$$

што је услов којег мора испунити чисто стање које задовољава (4.5а).

Уводећи векторе $|v\rangle$ и $|u\rangle = a|v\rangle$, Коши-Шварцова неједнакост, $|\langle v|u\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle$, даје $\langle a^+a\rangle \geq \langle a\rangle\langle a^+\rangle$, па је једини начин да (4.5б) буде испуњено једнакост $\langle a^+a\rangle = \langle a\rangle\langle a^+\rangle$, па отуда $N = 0$. У овом смислу довољно је да, на апсолутној нули, динамика непрекидно у времену пролази кроз скуп „кохерентних стања“,$|\alpha\rangle$, за које важи $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

Са друге стране, свако стање које задовољава израз (2.14а), мора да задовољи и нелинеарну Шредингерову једначину (2.15з). Отуда се задатак своди на проверу да ли нека кохерентнта стања могу задовољавати (2.15з) те отуда бити кандидати за чиста стања која остају чиста током еволуције у времену. Међутим, одричан одговор на ову могућност је већ познат[37]: квазидистрибуција у, тзв., репрезентацији кохерентних стања, $|\alpha\rangle$, не може да буде Диракова делта функција (тј., чисто кохерентно стање) и да истовремено задовољи мастер једначину (4.5а). Једини изузетак од овога је стање $|\alpha = 0\rangle$, које, са друге стране, представља стационарно стање за процес (4.5а).

---

[37] Видети израз (3.337) у [4].

Дакле, ни овај модел динамике отвореног система не дозвољава динамику која би чиста стања преводила у чиста стања – тј., која би описивала путању у Хилбертовом простору стања отвореног система.

4.6 Задат је хамилтонијан изолованог тронивоског атома изразом: $H = H_0 + H_I \equiv (\omega_1|1\rangle\langle1| + \omega_2|2\rangle\langle2| + \omega_3|3\rangle\langle3|) - \frac{1}{2}\left(\Omega_p e^{-i\omega_p t}|3\rangle\langle1| + \Omega_c e^{-i\omega_c t}|3\rangle\langle2| + h.c.\right)$. (4.6а)

Решити Шредингерову једначину за атом, ако: $\omega_p = \omega_3 - \omega_1, \omega_c = \omega_3 - \omega_2$ и прелаз између два нижа нивоа је забрањен.

Решење: Физичко порекло и значење овог хамилтонијана, тј., атома као изолованог система, биће дато у Задатку 4.9. Овде ће бити решена одговарајућа Шредингерова једначина. Решавање ће бити непосредно, без експлицитне примене поступка уведеног у Задатку 2.25 (који се, наравно, и овде лако може применити).

Потражимо решење нестационарне ШЈ (h=1):

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle, \tag{4.6б}$$

у облику:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} c_i\, e^{-i\omega_i t}|i\rangle, \tag{4.6в}$$

уз почетни услов: $|\psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^{3} c_i(0)\,|i\rangle$.

Сменом (4.6а,в) у (4.6б):

$$i\sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(c_i e^{-i\omega_i t}\right)|i\rangle = \sum_{j=1}^{3} c_j\, e^{-i\omega_j t}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ji}\,|i\rangle, \tag{4.6г}$$

где је стављено $H|j\rangle = \sum_{i=1}^{3}\alpha_{ji}\,|i\rangle$. Изједначавањем чланова уз (линеарно независна, базисна) стања добија се систем једначина:

$$i\frac{d}{dt}\left(c_i e^{-i\omega_i t}\right) = \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ji}\, c_j e^{-i\omega_j t}. \tag{4.6д}$$

На пример:

$$i\frac{d}{dt}\left(c_1 e^{-i\omega_1 t}\right) = i\dot{c}_1 e^{-i\omega_1 t} + ic_1(-i\omega_1)e^{-i\omega_1 t} = i\dot{c}_1 e^{-i\omega_1 t} + c_1\omega_1 e^{-i\omega_1 t},$$

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j1}\, c_j e^{-i\omega_j t} = c_1\omega_1 e^{-i\omega_1 t} - \frac{1}{2}\Omega_p c_3 e^{-it(-\omega_p+\omega_3)}.$$

Укупно, следи систем једначина:

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{i}{2}\Omega_p c_3,$$
$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{i}{2}\Omega_c c_3,$$
$$\frac{dc_3}{dt} = \frac{i}{2}\left(\Omega_p c_1 + \Omega_c c_2\right). \tag{4.6ђ}$$

Опет је најлакше решавати овај систем матрично, коришћењем матрице система једначина (4.6ђ):

$$\mathcal{M} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & 0 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6е}$$

Формално решење гласи:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = exp\left(\frac{it}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & 0 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \\ c_3(0) \end{pmatrix}, \tag{4.6ж}$$

где је експоненцијална матрица:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Omega_c^2+\mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]\Omega_p^2}{\Omega_c^2+\Omega_p^2} & \frac{2\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{4}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]^2\Omega_c\Omega_p}{\Omega_c^2+\Omega_p^2} & \frac{i\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]\Omega_p}{\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}} \\ \frac{2\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{4}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]^2\Omega_c\Omega_p}{\Omega_c^2+\Omega_p^2} & \frac{\mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]\Omega_c^2+\Omega_p^2}{\Omega_c^2+\Omega_p^2} & \frac{i\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]\Omega_c}{\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}} \\ \frac{i\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]\Omega_p}{\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}} & \frac{i\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right]\Omega_c}{\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}} & \mathrm{Cosh}\left[\frac{1}{2}t\sqrt{-\Omega_c^2-\Omega_p^2}\right] \end{pmatrix}.$$

Тако се коначно добијају изрази, уз смену $\Omega^2 = \Omega_c^2 + \Omega_p^2$:

$$c_1(t) = c_1(0)\left(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_p^2\cos(t\Omega/2)}{\Omega^2}\right) + c_2(0)\left(-\frac{\Omega_c\Omega_p}{\Omega^2} + \frac{\Omega_c\Omega_p\cos(t\Omega/2)}{\Omega^2}\right) +$$
$$\mathrm{i}c_3(0)\frac{\Omega_p\sin(t\Omega/2)}{\Omega},$$
$$c_2(t) = c_1(0)\left(-\frac{\Omega_c\Omega_p}{\Omega^2} + \frac{\Omega_c\Omega_p\cos(t\Omega/2)}{\Omega^2}\right) + c_2(0)\left(\frac{\Omega_c^2\cos(t\Omega/2)}{\Omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{\Omega^2}\right) +$$
$$\mathrm{i}c_3(0)\frac{\Omega_c}{\Omega}\sin(t\Omega/2),$$
$$c_3(t) = ic_1(0)\frac{\Omega_\mathrm{p}\sin(t\Omega/2)}{\Omega} + ic_2(0)\frac{\Omega_\mathrm{c}\sin(t\Omega/2)}{\Omega} + c_3(0)\cos(t\Omega/2). \tag{4.6з}$$

Уочити да за почетне услове $c_1(0) = \frac{\Omega_c}{\Omega}$, $c_2(0) = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$, $c_3(0) = 0$, следи: $c_3(t) = 0, \forall t$, док $c_1 = \frac{\Omega_c}{\Omega}, \mathrm{c}_2 = -\frac{\Omega_p}{\Omega}, \forall \mathrm{t}$. То јест, вектор

$$\frac{\Omega_c}{\Omega}|1\rangle - \frac{\Omega_p}{\Omega}|2\rangle \qquad (4.6и)$$

се не мења са временом. Лако се проверава да је ово својствени вектор матрице $\mathcal{M}$ за својствену вредност 0. Да би се добила промена *физичког стања* у времену, израз (4.6в), још сваку од константи у (4.6з) би требало помножити одговарајућим експоненцијалним чиниоцем – видети (4.6в).

НАПОМЕНА: Вектор (4.6и) се понекад назива „тамним“ (енг.: *dark state*), или „обученим“ (енг.: *dressed state*) стањем, и понекад погрешно тумачи као стање које зауставља динамику, тј., да, једном достигнуто, одговарајуће стање се (спонтано, тј., без икаквог спољашњег утицаја) не може променити. Наравно, *физичко стање* (4.6в) се итекако мења у дводимензионалном простору. Оно чега нема јесу деекситације из стања нивоа 3 - јер једноставно такве компоненте нема у суперпозицији (4.6и), а диполни прелаз са нивоа 2 на ниво 1 је забрањен. Зато атом не одговара упијањем ЕМ зрачења ласера све док неки нови спољашњи утицај (необухваћен разматраним моделом) не избаци ово стање из подпростора развијеног (под)базисом $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Назив „обучена“ стања може да наведе на погрешно виђење физичке ситуације. Обично се под „облачењем“ физичких система подразумевају различите врсте квантних *квазичестица*, „сачињених“ из разматраних система „обучених“ у примењено спољашње поље (нпр., Блохов електрон у ефективном пољу кристалне решетке). Овде тога нема, а приори, јер је атом овде разматран као затворен систем, *<u>док је стање (4.6и) обична суперпозиција стања атома</u>* – *<u>елементарна ствар с обзиром на први постулат квантне механике</u>*. Историјски разлози за ову терминологију леже у *предрасудама* да квантна механика и није тако много различита од класичне физике, што сугерише корисност, пре свега, ако већ не и једино, својствених стања, тј., „стационарних стања“ атома стандардне теорије која третира атом као затворен систем – а све у сврху да се избегну математичке „компликације“ и интерпретацијски важна питања које потичу од суперпозиција стања (квантне кохеренције, Задатак 1.1), квантне сплетености и сличног[38]. У те предрасуде спада и чињеница да, и данас, многи физичари баратају „квантним скоковима“, по правилу, без јавног признања да је то додатак који се мора придружити основама квантне теорије. То јест, „квантни скокови“ се појављују као нека врста постулата који *проширује* списак постулата у методским основама квантне механике – видети Задатак 4.10 у контрасту са Задатком 3.10.

---

[38] Читава друга половина 20. века обележена је оваквим ставом и применама у духу „мудрости“, енглески оригинал: „*Shut up and calculate*“. Нове физичке науке (квантна информација и рачунање, теорија отворених система, теорија декохеренције, немали број математичких метода и слично), проистекли су *искључиво* из појединачних и ретких *дубљих* промишљања квантне механике и њеног формализма, само узгредно појачаних неким применама. Једна од оштријих критика таквог манира у науци, и данас присутног, се може наћи у: W. H. Zurek, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003). За савремену теорију атома водоника видети: J. Jeknić-Dugić et al, Open Access Libr. **1**, e501 (2014). Улога суперпозиција стања у изградњи периодног система елемената је представљена у: E. Scerri, Nature **565**, 557 (2019) (и тамо дате референце).

4.7 Дати експлицитан облик Марковљеве мастер једначине за тронивоски атом као отворени систем изложен класичном ласерском пољу, у апроксимацији диполне интеракције атома, како са окружењем, тако и са пољем ласера. Претпоставити да су прелази између два нижа нивоа атома забрањени у диполној апроксимацији.

Решење: Полазна претпоставка је да за разматрани систем важи мастер једначина Марковљевог типа – квантно-оптичка мастер једначина [4]; в. и Задатак 3.11. Тако се задатак своди на препознавање чланова у комутаторском делу (уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја), као и експлицитног облика Линдбладових оператора.

Овде је изоловани систем „атом+ЕМ поља“ дефинисан Хамилтонијаном:

$$H = H_0 + H_E - \vec{D}_{atom} \cdot \left(\vec{\mathcal{E}}_{laser} + \vec{E}_E\right), \qquad (4.7а)$$

где је $\vec{D}_{atom}$ електрични дипол атома, $\vec{\mathcal{E}}_{laser}$ електрично поље ласера, а $\vec{E}_E$ електрично поље којег чини спољашње електромагнетно поље (окружење) које не укључује поље ласера. Прецизније: без поља ласера, тј., када је $\vec{\mathcal{E}}_{laser} = 0$, физичка ситуација је заправо стандардни модел квантне оптике који води квантно-оптичкој мастер једначини [4]; в. израз (4.4а). Како је поље ласера овде третирано класично, оно не представља динамички систем и није део окружења, већ дефинише адитивни део хамилтонијана атома (општи ставови представљени су у Задатку 3.16). То јест, краће би се израз (4.7а) могао записати:

$$H = H_{atom} \otimes I_E + I_{atom} \otimes H_B + H_{int}, \qquad (4.7б)$$

где је $H_{atom} = H_0 - \vec{D}_{atom} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{laser}$, и $H_{int} = -\vec{D}_{atom} \cdot \vec{E}_E \equiv -\sum_{i=x}^{z} D_i \otimes E_i$.

За тронивоски атом (h=1),

$$H_0 = \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \omega_2 |2\rangle\langle 2| + \omega_3 |3\rangle\langle 3|, \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \qquad (4.7в)$$

док окружење (ЕМ поље које представља динамички систем) се може, као и обично, моделовати као скуп неинтерагујућих бозонских модова:

$$H_E = \sum_{k,\lambda} \nu_k \, b_{k\lambda}^{+} b_{k\lambda}, \qquad (4.7г)$$

и индексом $\lambda = 1{,}2$ који одређује поларизацију ЕМ поља (Кулонов баждарни услов у електродинамици).

Дакле, формално, једина разлика у односу на стандардни модел двонивоског атома је у димензији простора атома и постојању спољашњег класичног поља ласера, које дефинише адитивни члан, тј., класично спољашње поље за атом – да нема окружења, атом би био затворени систем (попут модела изучаваног у Задатку 4.1).

Под претпоставком да је поље ласера *слабо*, може се користити стандардни поступак који води Марковљевој динамици атома, тј., квантно-оптичкој мастер једначини [2][39]. Зато се поступак овде своди на утврђивање члана у комутатору, у Шредингеровој слици, као и на облик оператора у дисипатору у првом Линдбладовом облику за Марковљеве мастер једначине.

Члан у комутаторском делу (уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја) следи на основи избора интеракционе слике. Наиме, стандардна дефиниција интеракционе слике подразумева сопствени хамилтонијан (изоловане) целине, $H_{atom} \otimes I_E + I_{atom} \otimes H_E$. Међутим, овде је једноставније радити у *алтернативној интеракционој слици* коју дефинише $H_0 + H_E$, а што је, прецизно, хамилтонијан који дефинише интеракциону слику за атом када ласерског поља нема. У том смислу разматрани модел само проширује стандардни модел двонивоског атома.

Дакле, полазна једначина кретања изоловане целине у диференцијалном облику је, у интеракционој слици, дата изразом:

$$\frac{d\rho_I}{dt} = i\left[\vec{D}_{I\,atom} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{laser} \otimes I_E, \rho_I\right] - i[H_{I\,int}, \rho_I]. \tag{4.7д}$$

Узимањем трага по окружењу, по претпоставци задатка, (4.7д) води мастер једначини:

$$\frac{d\rho_{I\,atom}}{dt} = i\left[\vec{D}_{I\,atom} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{laser}, \rho_{I\,atom}\right] + \mathcal{D}[\rho_{I\,atom}]. \tag{4.7ђ}$$

Надаље ћемо занемарити Лембов и Штарков померај[40], те преостаје одређивање дисипаторског дела (4.7ђ), који је претпостављен да је

---

[39] Видети и: C. W. Gardiner, P. Zoller, Quantum Noise, Springer, 2000, друго издање.

[40] Ови чланови, наравно, се појављују у комутаторском, унитарном, делу мастер једначине и у интеракционој слици, али не утичу на резултате када динамиком „доминира“ дисипатор. Илустрације ради, у случају једног кубита (нпр., двонивоског атома), сви унитарни доприноси само воде ротацији стања кубита

Марковљевог облика и који је дат општим обликом (19), што у микроскопским извођењима гласи [4]:

$$\sum_{\alpha,\beta,\omega} \gamma_{\alpha\beta}(\omega)\left(A_\beta(\omega)\rho A_\alpha^+(\omega) - \frac{1}{2}\left\{A_\alpha^+(\omega)A_\beta(\omega), \rho\right\}\right), \tag{4.7е}$$

где је матрица $\left(\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\right)$ позитивно (семи)дефинитна, док је облик оператора који се појављују у дисипатору успостављен изразима изучаваним у Задатку 2.27:

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega), [H_S, A_\alpha^+(\omega)] = +\omega A_\alpha^+(\omega). \tag{4.7ж}$$

При томе: (*i*) $H_S = \sum_k E_k P_k$ је спектрални облик хамилтонијана отвореног система *који* дефинише интеракциону слику, и (*ii*) $A_\alpha(\omega) = \sum_{i,j} P_i A_\alpha P_j, \omega = E_j - E_i$, док је интеракција записана у облику $H_{int} = \sum_\alpha A_\alpha \otimes B_\alpha$. Како успоставља Задатак 2.13, обли Марковљевог дисипатора је исти за интеракциону и Шредингерову слику, те ћемо надаље радити само са изразима у Шредингеровој слици.

Како је, у разматраном моделу, $H_{int} = -\vec{D}_{atom} \cdot \vec{E}_E$, општи услови енергијске репрезентације за диполни момент атома (израз (4.3в)), $\langle i|\vec{D}|j\rangle = \vec{d}_{ij}(1 - \delta_{ij})$, као и услов задатка, $\langle 1|\vec{D}|2\rangle = 0$, воде изразу за диполни момент атома (у Шредингеровој слици):

$$\vec{D}_{atom} = \vec{d}_{13}|1\rangle\langle 3| + \vec{d}_{23}|2\rangle\langle 3| + \vec{d}_{31}|3\rangle\langle 1| + \vec{d}_{32}|3\rangle\langle 2|, \tag{4.7з}$$

па тиме и појављивању истакнутих дијада у изразу за интеракцију атома са окружењем.

Општи и строги поступак [2,4] извођења дисипаторског дела мастер једначине, израз (4.7е), подразумева извођење оператора $A_\alpha(\omega)$ из израза (4.7з), полазећи од интеракционог хамилтонијана H_{int}. У општем случају, то може дати ужи скуп оператора од скупа свих оператора који задовољавају (4.7ж). Међутим, због малог броја димензија простора стања тронивоског атома, испоставља се да ће бити довољно само непосредно проверити (4.7ж), уместо читавог, општег, поступка. То јест, за тронивоски атом довољно је проверити (4.7ж) само за вандијагоналне елементе, $|3\rangle\langle 1|, |3\rangle\langle 2|, |1\rangle\langle 3|$ и $|2\rangle\langle 3|$ који се појављују у (4.7з), тј., у H_{int}. Читаоцу се

на Блоховој сфери, што је тривијално у поређењу са утицајем дисипатора који деформише Блохову сферу, па је у екстремном случају може свести и на само једну тачку – њен центар [3].

оставља да потврди довољност овог поступка спроводећи потпун, строги поступак извођења оператора $A_\alpha(\omega)$.

На пример, лако се добија:

$$[H_0, |1\rangle\langle 3|] = (\omega_1 - \omega_3)|1\rangle\langle 3|, \qquad (4.7и)$$

и аналогно за остале наведене вандијагоналне чланове.

Због једнозначне везе фреквенција и оператора, $(\omega_1 - \omega_3) \leftrightarrow |1\rangle\langle 3|, (\omega_2 - \omega_3) \leftrightarrow |2\rangle\langle 3|$, и чињенице да, у (4.7з), нема оператора који одговара фреквенцији $\omega = 0$, можемо писати за операторе $A_\alpha(\omega) = A_\alpha \delta_{\alpha\omega}$. Сменом овога у (4.7е), као и урачунавања негативних фреквенција у односу на задате, а што одговара адјунгованим операторима, одмах даје дисипатор у другом Линдбладовом облику[41]:

$$\mathcal{D}(\rho_{atom}) = \gamma_1 \left(|1\rangle\langle 3|\rho_{atom}|3\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}(|3\rangle\langle 3|\rho_{atom} + \rho_{atom}|3\rangle\langle 3|) \right) +$$
$$\gamma_2 \left(|2\rangle\langle 3|\rho_{atom}|3\rangle\langle 2| - \frac{1}{2}(|3\rangle\langle 3|\rho_{atom} + \rho_{atom}|3\rangle\langle 3|) \right) +$$
$$\gamma_3 \left(|3\rangle\langle 2|\rho_{atom}|2\rangle\langle 3| - \frac{1}{2}(|2\rangle\langle 2|\rho_{atom} + \rho_{atom}|2\rangle\langle 2|) \right) +$$
$$\gamma_4 \left(|3\rangle\langle 1|\rho_{atom}|1\rangle\langle 3| - \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1|\rho_{atom} + \rho_{atom}|1\rangle\langle 1|) \right); \qquad (4.7j)$$

конкретан облик константи γ_i овде није од интереса.

Тако мастер једначина гласи:

$$\frac{d\rho_{atom}}{dt} = i\left[\vec{D}_{I\,atom} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{laser}, \rho_{I\,atom}\right] + \mathcal{D}(\rho_{atom}), \qquad (4.7к)$$

памтећи да (у интеракционој слици), уз поједностављење $\vec{d}_{ij} = \vec{d}, \forall i, j$:

$$\vec{D}_{I\,atom} = \mathrm{e}^{iH_0 t}\vec{d}(|1\rangle\langle 3| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2|)\mathrm{e}^{-iH_0 t} = \vec{d}\big(e^{i\omega_{13}t}|1\rangle\langle 3| +$$
$$e^{i\omega_{23}t}|2\rangle\langle 3| + e^{i\omega_{31}t}|3\rangle\langle 1| + e^{i\omega_{32}t}|3\rangle\langle 2|\big), \qquad (4.7л)$$

уз дефиницију $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$.

Ограничење на процесе „спонтане“ деекситације атома води условима $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$ (што важи за окружење на апсолутној нули). За јако спољашње поље мора се радити у интеракционој слици са пуним хамилтонијаном, $H_{atom} \otimes I_E + I_{atom} \otimes H_E$, што би водило другачијим операторима $A_\alpha(\omega)$ - видети услов (4.7ж) и израз (4.7и).

---

[41] Поступак, наравно, подразумева још и израчунавање фактора пригушења.

НАПОМЕНА: Овде разматрани модел је добро познати, тзв., ламбда-модел тронивоског атома у квантној оптици. Могућност да је неки од виших енергијских нивоа дегенерисан се непосредно обрађује.

4.8 Решити дисипаторски део мастер једначине из претходног задатка.

Решење: Како нас занима само динамика индукована дисипатором (видети и фусноту 41)[42], задржаћемо само једначине које потичу од дисипатора, тј.,

$$\frac{d\rho_{11}}{dt}=\gamma_1\rho_{33}-\gamma_4\rho_{11},$$
$$\frac{d\rho_{12}}{dt}=-\frac{1}{2}(\gamma_3+\gamma_4)\rho_{12},$$
$$\frac{d\rho_{13}}{dt}=-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\rho_{13}, \qquad (4.8а)$$
$$\frac{d\rho_{22}}{dt}=\gamma_2\rho_{33}-\gamma_3\rho_{22},$$
$$\frac{d\rho_{23}}{dt}=-\frac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_3)\rho_{23},$$
$$\frac{d\rho_{33}}{dt}=-(\gamma_1+\gamma_2)\rho_{33}+\gamma_3\rho_{22}+\gamma_4\rho_{11}; \qquad (4.8б)$$

У (4.8б) су дијагонални и вандијагонални чланови раздвојени:

$$\frac{d\rho_{11}}{dt}=\gamma_1\rho_{33}-\gamma_4\rho_{11}, \qquad \frac{d\rho_{12}}{dt}=-\frac{1}{2}(\gamma_3+\gamma_4)\rho_{12},$$
$$\frac{d\rho_{22}}{dt}=\gamma_2\rho_{33}-\gamma_3\rho_{22}, \qquad \frac{d\rho_{13}}{dt}=-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\rho_{13},$$
$$\frac{d\rho_{33}}{dt}=-(\gamma_1+\gamma_2)\rho_{33}+\gamma_3\rho_{22}+\gamma_4\rho_{11}, \qquad \frac{d\rho_{23}}{dt}=-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\rho_{23}. \qquad (4.8в)$$

Очигледно, вандијагонални чиниоци нестају експоненцијално брзо (као у декохеренцији):

$$\rho_{12}=\rho_{12}(0)e^{-(\gamma_3+\gamma_4)t}, \rho_{13}=\rho_{13}(0)e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)t}, \rho_{23}=\rho_{23}(0)e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)t}. \qquad (4.8г)$$

Матрично решавање система једначина за дијагоналне чланове даје превелика општа решења. Зато поједностављење, $\gamma_i=\gamma,\forall i$, даје следећа решења за дијагоналне чланове:

---

[42] Требало би нагласити: унитарни чланови (комутатор) су од суштинског, чак и фундаменталног физичког значаја када су у питању спектри сопствених хамилтонијана отворених система. У такве чланове спадају и Лембов и Штарков померај у спектру атома; њихов пуни третман може да захтева и пуну машинерију теорије ренормализације у квантној електродинамици [4]. Разлог да овде то не урачунавамо лежи у чињеници да нас занима само *неунитарна* динамика коју изазива окружење.

$$\rho_{11}(t) = \frac{1}{6}(2 + e^{-3t\gamma} + 3e^{-t\gamma})\rho_{11}(0) + \frac{1}{6}(2 + e^{-3t\gamma} - 3e^{-t\gamma})\rho_{22}(0) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t\gamma}\right)\rho_{33}(0)$$
$$\rho_{22}(\mathrm{t}) = \frac{1}{6}(2 + e^{-3t\gamma} - 3e^{-t\gamma})\rho_{11}(0) + \frac{1}{6}(2 + e^{-3t\gamma} + 3e^{-t\gamma})\rho_{22}(0) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t\gamma}\right)\rho_{33}(0)$$
$$\rho_{33}(\mathrm{t}) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t\gamma}\right)\rho_{11}(0) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t\gamma}\right)\rho_{22}(0) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t\gamma}\right)\rho_{33}(0)$$

одакле се може видети да постоји стационарно (асимптотско) решење, независно од почетног стања: $\rho_{ii}(t \to \infty) = \frac{1}{3}, \forall i$.

НАПОМЕНА: Систем једначина (4.8в) за дијагоналне елементе је заправо облика система Паулијевих мастер једначина, решаваних у Задацима 3.34 и 3.35. За потребе, нпр., изучавања светлошћу изазване провидности средине (енг., *electromagnetically induced transparency*), мора се урачунати и унитарни део мастер једначине.

4.9 Као у Задатку 4.7, само за случај када постоје два, међусобно независна, једномодна ласерска поља као квантни системи. На основи тога дати физичке аргументе за модел (4.6а).

Решење: Дакле, атом је у контакту са окружењем којег чини неконтролабилно многомодно електромагнетно поље. При томе, атом је изложен утицају два независна, квантно третирана ласерска поља која представљају динамичке системе, тј., не могу се свести на спољашњи потенцијал за атом. Тада хамилтонијан изолованог система гласи:

$$H = H_0 + H_{laser} + H_E + H_{int}, \tag{4.9a}$$

где је $H_{int} = -\vec{D}_{atom} \cdot \left(\vec{\mathcal{E}}_{laser} + \vec{E}_E\right)$ - без интеракције ласера са окружењем атома.

Укупно окружење за атом је „ласери+ЕМ поље“. Међутим, такво, укупно, окружење, које у општем случају има своју структуру, уноси нетривијалне методске проблеме (енг., *structured environment*)[43]. Зато се може одабрати другачије структуриран сложени систем: да отворени систем буде сложен (видети опште разматрање у Задатку 2.26), тј., „атом+ласер“, при чему само „атом“ интерагује са окружењем[44]. Дакле, разматрање

---

[43] Неки решиви примери представљени су у задацима 4.12 и 4.13.

[44] Овакве физичке ситуације су и физичка реалност за многе моделе, рецимо за атоме: за побуђени атом у вакууму, квантни вакуум је окружење за *унутрашње* степене слободе атома, док центар маса атома (у вакууму) је одвојен, затворени (а у неким моделима и изоловани) систем. Споља изазвано купловање атомског центра маса и унутрашњих степена слободе је разматрано у задацима 3.12-3.14.

сложеног отвореног система може водити Марковљевој[45] динамици која, када је једном позната, може се користити за разматрање динамике подсистема[46] отвореног система. За овако структуриран изоловани систем се модел (4.9а) може записати у пуном операторском облику:

$$H = H_0 \otimes I_{laser} \otimes I_E + I_0 \otimes H_{laser} \otimes I_E + I_0 \otimes I_{laser} \otimes H_E - \sum_{i=x,y,z} D_i \otimes \mathcal{E}_i \otimes I_E - \sum_{i=x,y,z} D_i \otimes I_{laser} \otimes E_i. \qquad (4.9б)$$

Израз (4.9б) указује да ће дисипатор бити одређен само последњим чланом, $\sum_i D_i \otimes I_{laser} \otimes E_i$, као да ласерских поља и нема. Како су све квантне слике међусобно изоморфне, упутно је одабрати, по могућству, најједноставнију; наравно, свака слика имаће свој облик комутаторског, као и дисипативног, члана у мастер једначини за отворени систем – што је овде сложени систем „атом+ласерска поља“. Одабрана структура сложеног система указује на могућност да изаберемо интеракциону слику дефинисану сопственим хамилтонијаном (у скраћеном операторском облику), $H_0 + H_{laser} + H_E$, аналогно Задатку 4.7.

Изнад одабрана интеракциона слика не урачунава интеракцију атома са тим пољима, те ће се члан $\sum_i D_i \otimes \mathcal{E}_i \otimes I_E$ наћи у комутаторском (унитарном) делу мастер једначине, аналогно комутатору у изразу (4.7д).

У лимесу слабе интеракције са окружењем, облик дисипатора (исти за Шредингерову и интеракциону слику) одређен је, како је већ коришћено у Задатку 4.7, условом испуњења комутационих релација (4.7ж). Како је у контакту са окружењем само атом, једини оператори интеракције, који се могу појавити у (4.7ж), су оператори атомског система. Како опсервабле атома комутирају са опсерваблама ласера, једини нетривијални чланови у изразу (4.7ж) су чланови који се тичу атома, са хамилтонијаном H_0.

Коришћењем (4.7л) враћеног у Шредингерову слику, постаје јасно да опет треба проверити (4.7ж) за дијаде уведене у Задатку 4.7 – што је модел усвојен и у овом задатку. Како су чланови овде исти као и у Задатку 4.7, и резултати ће бити исти, тј., дисипатор је и у овом случају дат изразом (4.7ј), уз

---

[45] Услови марковљевости за динамику подсистема сложеног отвореног система су засебан задатак, нпр., у: A. Rivas et al, New J. Phys. **12**, 113032(2010).

[46] Неке суптилности таквих разматрања на општем нивоу могу се наћи у M. Arsenijević et al, Int. J. Theor. Phys. **57**, 3492 (2018), и тамо датим референцама.

допуну: уместо ρ_{atom}, у разматраном моделу се појављује $\rho_{atom+laser}$, док дијаде $|i\rangle\langle i|$ за атомски систем добијају облик: $|i\rangle\langle i| \otimes I_{laser}$.

Сада се читалац може лако уверити да је мастер једначина у интеракционој слици дата изразом (са истим пратећим претпоставкама уведеним у Задатку 4.7):

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\left[\sum_i d_i \left(e^{-i\omega_{31}t}|1\rangle\langle 3| + e^{-i\omega_{32}t}|2\rangle\langle 3| + e^{i\omega_{31}t}|3\rangle\langle 1| + e^{i\omega_{32}t}|3\rangle\langle 2|\right) \otimes \mathcal{E}_i, \rho\right] + \gamma_1 \left(|1\rangle\langle 3| \otimes I_{laser}\rho|3\rangle\langle 1| \otimes I_{laser} - \frac{1}{2}\{|3\rangle\langle 3| \otimes I_{laser}, \rho\}\right) + \gamma_2 \left(|2\rangle\langle 3| \otimes I_{laser}\rho|3\rangle\langle 2| \otimes I_E - \frac{1}{2}\{|3\rangle\langle 3| \otimes I_{laser}, \rho\}\right) + \gamma_3 \left(|3\rangle\langle 2| \otimes I_{laser}\rho|2\rangle\langle 3| \otimes I_{laser} - \frac{1}{2}\{|2\rangle\langle 2| \otimes I_{laser}, \rho\}\right) + \gamma_4 \left(|3\rangle\langle 1| \otimes I_{laser}\rho|1\rangle\langle 3| \otimes I_{laser} - \frac{1}{2}\{|1\rangle\langle 1| \otimes I_{laser}, \rho\}\right), \tag{4.9в}$$

у којем $\mathcal{E}_i$ означавају Декартове компоненте електричног поља ласера; на пример, у моделу $\mathcal{E}_i = \sqrt{\frac{2\pi\omega_p}{V}}\sum_{r=1,2} \varepsilon_{pi}^{(r)} (b_r + b_r^+) + \sqrt{\frac{2\pi\omega_c}{V}}\sum_{r=1,2} \varepsilon_{ci}^{(r)} (c_r + c_r^+)$, где индекси p и c означавају два независна ласерска поља са припадајућим Босе операторима b и c, редом.

Наравно, узимањем трага по ласерским пољима добија се мастер једначина за атом (и обрнуто). Али присуство оператора ласерких поља не омогућује запис комутатора у жељени облик, $[h_{atom}, \rho_{atom}]$, где је h_{atom} неки ермитски оператор са димензијом енергије, док је $\rho_{atom} = tr_{laser}\rho$. Докажимо ово.

Разложимо стање сложеног система по базису алгебре: $\rho = \sum_{i,j} F_{i,atom} \otimes G_{j,laser}$, и сменимо у комутатор у (4.9в). После узимања трага по ласерима и сређивања, за сваку Декартову компоненту i се добија:

$$\left[d_i\left(e^{-i\omega_{31}t}|1\rangle\langle 3| + e^{-i\omega_{32}t}|2\rangle\langle 3| + e^{i\omega_{31}t}|3\rangle\langle 1| + e^{i\omega_{32}t}|3\rangle\langle 2|\right), \sum_{p,q} F_{p,atom} \left(tr_{laser}\left(\mathcal{E}_i G_{q,laser}\right)\right)\right]. \tag{4.9г}$$

Уочити да сума у комутатору не представља стање атома, јер оно гласи: $\rho_{atom} = tr_{laser}\rho = \sum_{p,q} F_{p,atom}\left(tr_{laser}G_{q,laser}\right)$.

Како потпуна позитивност динамике подсистема (овде: атома) сложеног отвореног система захтева посебно почетно стање сложеног отвореног система[47], то се из (4.9в) не може непосредно закључити да ли је динамика потпуно позитивна за атом. Са друге стране, дисипатор је Марковљевог облика (доказ лако следи разлагањем стања целине по базису алгебре, као за (4.9г)) – дакле, гарантовано потпуно позитивна [2,4].

Отуда и важне лекције из овог задатка: (а) Занемаривање унитарног дела може створити, могуће погрешан, утисак да је динамика подсистема (атома) Марковљева (па отуда и нужно потпуно позитивна); (б) овиме се илуструје корисност пројекционог метода Накаџима и Цванцига: наша анализа је егзактна, док пројекциони метод *одбацује* све корелације у систему (овде: у систему атом+ласерска поља) као и информације о стању окружења (видети Задатак 2.2), али са друге стране нема проблем истакнут тачком (а), већ води уобичајеном (жељеном, в. изнад) облику комутатора[48]; (в) као општа алтернатива се намеће TCL метод [4] који не зависи од почетних корелација и јачине интеракције система са окружењем.

Коначно, покажимо како следи модел (4.6а) из овде разматраног модела. У ту сврху кренимо од интеракционог хамилтонијана за систем атом+ласери, коришћењем (4.3а,б). У интеракционој слици за атом+ласери сопствени хамилтонијан, $H_0 \otimes I_{laser} + I_0 \otimes H_{laser}$, уз коришћење (4.7в,г), интеракција са ласерима, узима облик:

$$H_{AFint} = -d_i\left(e^{-i\omega_{31}t}|1\rangle\langle 3| + e^{-i\omega_{32}t}|2\rangle\langle 3| + e^{i\omega_{31}t}|3\rangle\langle 1| + e^{i\omega_{32}t}|3\rangle\langle 2|\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{2\pi\omega_p}{V}}\sum_{r=1,2}\varepsilon_{pi}^{(r)}\left(e^{-i\omega_p t}b_r + e^{i\omega_p t}b_r^+\right) + \sqrt{\frac{2\pi\omega_c}{V}}\sum_{r=1,2}\varepsilon_{ci}^{(r)}\left(e^{-i\omega_c t}c_r + e^{i\omega_c t}c_r^+\right)\right). \tag{4.9д}$$

Из (4.9д) је очигледно да постоје „веома брзи“ чланови, сразмерни члановима који имају $\pm(\omega_{ij} + \omega_k), i, j = 1,2,3, k = c, p,$ у експоненту. Одбацивање ових чланова је већ коришћени поступак RWA-за-хамилтонијан.

Поређењем са (4.6а) постаје јасно да се мора редефинисати и купловање (интеракција) атома са пољима[49], у смислу да се модови b упарују само са

---

[47] M. Arsenijević et al, Int. J. Theor. Phys. **57**, 3492 (2018).

[48] Одличан пример за ово је израз (5.50) у [2].

[49] Што се лако остварује редефиницијом интеракције (4.9г).

$|1\rangle\langle 3|$ и $|3\rangle\langle 1|$, док се модови c упарују само са $|2\rangle\langle 3|$ и $|3\rangle\langle 2|$. Како се модел (4.6а) тиче атома као затвореног система, морају се одбацити и Босе оператори ласерских поља (може и једноставно стављањем бројева, уместо оператора)[50]. Захтев одржања енергије имплицира посебна купловања, позната почев од Задатка 3.11. Тако израз (4.9д) поприма облик:

$$H_{AFint} = -d_i \left(\sqrt{\frac{2\pi\omega_p}{V}} \sum\nolimits_{r=1,2} \varepsilon_{pi}^{(r)} \left(e^{-i\omega_{31}t} e^{i\omega_p t} |1\rangle\langle 3| + e^{i\omega_{31}t} e^{-i\omega_p t} |3\rangle\langle 1| \right) + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{2\pi\omega_c}{V}} \sum\nolimits_{r=1,2} \varepsilon_{ci}^{(r)} \left(e^{i\omega_{32}t} e^{-i\omega_c t} |3\rangle\langle 1| + e^{-i\omega_{32}t} e^{i\omega_c t} |2\rangle\langle 3| \right) \right). \qquad (4.9ђ)$$

Како је класично ласерско поље претпостављено у Задатку 4.6 да буде једномодно, нестаће индекс за поларизацију, док повратак у Шредингерову слику (сада само у односу на атомски хамилтонијан) елиминише фреквенције ω_{ij}, да би се коначно добио израз (4.6а), уз дефиницију константи: $\frac{\Omega_j}{2} \equiv \vec{d} \cdot \vec{\varepsilon}_j \sqrt{\frac{2\pi\omega_j}{V}}, j = c, p$. Останак у интеракционој слици даје, уместо (4.9ђ):

$$-\frac{1}{2}\left(\Omega_p e^{-i\Delta_1 t} |1\rangle\langle 3| + \Omega_c e^{-i\Delta_2 t} |2\rangle\langle 3| + h.c. \right), \qquad (4.9е)$$

што је израз који се често налази у оквирима анализе светлошћу изазване провидности средине[51], где су константе: $\Delta_1 \equiv \omega_{31} - \omega_p$, $\Delta_2 \equiv \omega_{32} - \omega_c$.

НАПОМЕНА: Вероватно је очигледно да се сада мање-више непосредно описују практично сви Марковљеви модели у употреби у квантној оптици – проширењем броја енергијских нивоа, или броја атома, или дегенерација енергијских нивоа[52], са пажњом усмереном на моделовање интеракције система са окружењем и ласерима, и то у *строгом виду* – без проблематичних *RWA*-за-хамилтонијане и *ad hoc*[52] интервенција.

---

[50] Колико год чудно звучало, ово је чест поступак у квантној оптици; видети, нпр., M. Fleischhauer et al, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005), као и одељак 7 у M. O. Scully and M. Suhail Zubairy, Quantum Optics, Cambrdge Univ. Press, 2001, друго издање. При томе, требало би нагласити: ласерско поље се не сматра нужно класичним *од самог почетка разматрања* – иначе се не би ни појављивали оператори ласера да би онда накнадно били брисани.

[51] Видети, нпр., M. Fleischhauer et al, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005). Вреди додати: ту се мастер једначина у дисипаторском делу, ад хок (израз (9)), допуњује Лиувилијанима $|2\rangle\langle 2|$ и $|3\rangle\langle 3|$. У оквирима строгих (микроскопских) разматрања заснованих на квантној оптичкој мастер једначини [4], ово додавање подразумева купловање типа, $|2\rangle\langle 2| \times B_E + |3\rangle\langle 3| \times B'_E$, где су B_E и B'_E неке погодне опсервабле окружења. Наравно, то је модел декохеренције када енергија постаје „опсервабла бројача“, задатак 1.13.

[52] Видети, нпр., C. W. Gardiner, P. Zoller, Quantum Noise, Springer, 2000, друго издање.

4.10 За модел тронивоског атома уведена је динамика описана диференцијалном једначином ($h = 1$):

$$i\frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} = \left(H - \frac{i}{2}\sum_i \gamma_i\, A_i^{+} A_i\right)|\varphi(t)\rangle, \qquad \text{(4.10а)}$$

где је H дат изразом (4.9е), док се оператори A_i појављују у мастер једначини (4.9в) као Линдбладови оператори. Изучити могућност појављивања „тамног стања“ атома за модел (4.10е).

Решење: Сменом Линдбладових оператора из израза (4.9в) у неермитски део хамилтонијана у (4.10а) даје следећи члан:

$$-\frac{i}{2}\big((\gamma_1+\gamma_2)|3\rangle\langle 3| + \gamma_3|2\rangle\langle 2| + \gamma_4|1\rangle\langle 1|\big). \qquad \text{(4.10б)}$$

Сменом (4.10б) и (4.9е) у (4.10а) добија се (у интеракционој слици):

$$i\frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} = \Big(-\frac{1}{2}\big(\Omega_p e^{-i\Delta_1 t}|1\rangle\langle 3| + \Omega_c e^{-i\Delta_2 t}|2\rangle\langle 3| + h.c.\big) - \frac{i}{2}\big((\gamma_1+\gamma_2)|3\rangle\langle 3| +$$

$$\gamma_3|2\rangle\langle 2| + \gamma_4|1\rangle\langle 1|\big)\Big)|\varphi(t)\rangle. \qquad \text{(4.10в)}$$

Овде је згодно отрести се временске зависности поступком описаним у Задатку 2.24. Како тај поступак оставља непромењеним дијагоналне чланове, размотримо вандијагоналне чланове хамилтонијана у (4.10в), у репрезентацији одабраног базиса стања, $|1\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, |2\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, |3\rangle \to \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p e^{-i\Delta_1 t} \\ 0 & 0 & \Omega_c e^{-i\Delta_2 t} \\ \Omega_p e^{i\Delta_1 t} & \Omega_c e^{i\Delta_2 t} & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4.10г)}$$

Увођење унитарног оператора $V = \begin{pmatrix} e^{if_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{if_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{if_3 t}\end{pmatrix}$ даје:

$$\begin{pmatrix} e^{if_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{if_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{if_3 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p e^{-i\Delta_1 t} \\ 0 & 0 & \Omega_c e^{-i\Delta_2 t} \\ \Omega_p e^{i\Delta_1 t} & \Omega_c e^{i\Delta_2 t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-if_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-if_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-if_3 t}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p e^{i(f_1-\Delta_1-f_3)t} \\ 0 & 0 & \Omega_c e^{i(f_2-\Delta_2-f_3)t} \\ \Omega_p e^{-i(f_1-\Delta_1-f_3)t} & \Omega_c e^{-i(f_2-\Delta_2-f_3)t} & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4.10д)}$$

Услови нестајања временских чланова следе из (4.10д): $f_1 - \Delta_1 - f_3 = 0$ и $f_2 - \Delta_2 - f_3 = 0$. Изаберимо $f_1 = 0$. Тада $f_2 = \Delta_2 - \Delta_1$ и $f_3 = -\Delta_1$, што даје:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\Delta_2 - \Delta_1)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Delta_1 t} \end{pmatrix},$$

па

$$i\dot{V}V^+ = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 - \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta_1 \end{pmatrix}, \qquad (4.10ђ)$$

док

$$VHV^+ =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\Delta_2 - \Delta_1)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Delta_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\gamma_4 & 0 & -\frac{\Omega_p}{2}e^{-i\Delta_1 t} \\ 0 & -\frac{i}{2}\gamma_3 & -\frac{\Omega_c}{2}e^{-i\Delta_2 t} \\ -\frac{\Omega_p}{2}e^{i\Delta_1 t} & -\frac{\Omega_c}{2}e^{i\Delta_2 t} & -\frac{i}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\Delta_2 - \Delta_1)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Delta_1 t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\gamma_4 & 0 & -\frac{\Omega_p}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2}\gamma_3 & -\frac{\Omega_c}{2} \\ -\frac{\Omega_p}{2} & -\frac{\Omega_c}{2} & -\frac{i}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix}. \qquad (4.10е)$$

У складу са (2.24г), сабирањем (4.10ђ) и (4.10е) се добија временски независан облик неермитског хамилтонијана, означен H', који у алгебарском (безрепрезентационом) запису гласи:

$$H' = -i\frac{\gamma_4}{2}|1\rangle\langle 1| - \left(\Delta_2 - \Delta_1 + i\frac{\gamma_3}{2}\right)|2\rangle\langle 2| - \left(\frac{i}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + \Delta_1\right)|3\rangle\langle 3| -$$
$$\frac{1}{2}\Big(\Omega_p(|3\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3|) + \Omega_c(|3\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3|)\Big). \qquad (4.10ж)$$

Памтећи Задатак 4.6, потражимо тамно стање, означено са $|a\rangle$, такво да важи $H'|a\rangle = 0$. Зато започнимо са последњим чланом, тј., захтевом:

$$\big(\Omega_p|3\rangle\langle 1| + \Omega_c|3\rangle\langle 2| + \Omega_p|1\rangle\langle 3| + \Omega_c|2\rangle\langle 3|\big)|a\rangle = 0. \qquad (4.10з)$$

Како су прелази између нижих нивоа, $|1\rangle$ и $|2\rangle$, забрањени, потражимо $|a\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$, што сменом у (4.10з) даје:

$$c_1\Omega_p + c_2\Omega_c = 0. \qquad (4.10и)$$

Услов нормирања и једначина (4.10и) дају већ познате изразе – видети (4.6и): $|a\rangle = \frac{\Omega_c}{\Omega}|1\rangle - \frac{\Omega_p}{\Omega}|2\rangle$, $\Omega = \sqrt{\Omega_\text{p}^2 + \Omega_\text{c}^2}$. Да би услов аналоган услову

(4.10з) важио и за прва два члана у (4.10ж), избор се лако намеће: $0 = \gamma_4 = \gamma_3 = \Delta_1 - \Delta_2$.

Инверзна трансформација V^+, као и „хамилтонијан“ у (4.10в), за одабране вредности параметара, у матричном облику дају:

$$\left(H - \frac{i}{2}\sum_i \gamma_i\, A_i^+ A_i\right) V^+ |a\rangle \rightarrow$$
$$e^{i\Delta_1 t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\Omega_p}{2} e^{-2i\Delta_1 t} \\ 0 & 0 & -\frac{\Omega_c}{2} e^{-2i\Delta_1 t} \\ -\frac{\Omega_p}{2} & -\frac{\Omega_c}{2} & -\frac{i}{2}\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) e^{-i\Delta_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Delta_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Omega_c}{\Omega} \\ -\frac{\Omega_p}{\Omega} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Дакле, нађено стање $|a\rangle$ представља пример „тамног“ стања атома које је истовремено и стационарно стање за динамику (4.10а) – за разлику од тамног стања препознатог у Задатку 4.6.

НАПОМЕНА: Вреди напоменути: експериментално уочавање тамних стања атома подразумева посматрање *појединачног* атома. То јест, тамна стања атома *не могу бити непосредно уочена на (статистичком) ансамблу* атома. Разлог за то је интуитивно јасан: прелази у, и из, тамних стања су статистичке природе те детекција израчивања од стране ансамбла усредњава појединачне атомске прелазе те тако *статистички брише* (усредњава) ову занимљиву појаву.

4.11 Нека матрица $R(t)$ репрезентује неки оператор на Хилберто-вом простору димензије n. Нека она задовољава диференцијалну једначину (h=1):

$$\frac{d}{dt}R = -iH_{eff}R + iRH_{eff}^+, \qquad (4.11а)$$

тако да: $\frac{d}{dt}R \leq 0$ и $trR \leq 1, \forall t$, где је

$$H_{eff} = H - \frac{i}{2}\sum_l \gamma_l\, |l\rangle\langle l|, \qquad (4.11б)$$

са реалним и ненегативним γ_i и једним базисом $|l\rangle$ у Хилбертовом простору. Доказати да статистички оператор

$$\rho = R \oplus 0 + (1 - trR)|0\rangle\langle 0|, \qquad (4.11в)$$

задовољава мастер једначину

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H\oplus 0, \rho] + \sum_l \left(L_l \rho L_l^+ - \frac{1}{2}\{L_l^+ L_l, \rho\} \right), \qquad (4.11г)$$

чији су Линдбладови оператори облика: $L_l = \sqrt{\gamma_l}|0\rangle\langle l|$. Ознака "$\oplus 0$" представља ортогонално проширење Хилбертовог простора једнодимензионалним простором којег дефинише орт $|0\rangle$.

Решење: Прво дефинишимо проширење Хилбертовог простора, а тиме и (4.11в).

Хилбертов простор матрица се проширује једнодимензионалним простором, чиме се уводи Хилбертов простор матрица ранга за један већи од почетног, тако што се свака матрица проширује још једном колоном и врстом. У горњем случају, $R \to R\oplus 0$ даје матрично проширење:

$$R \to \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.11д)$$

где се на дијагонали налази већ задата матрица R, па отуда $\rho =$

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 - trR \end{pmatrix}, \qquad (4.11ђ)$$

и аналогно за хамилтонијан, $H\oplus 0$. Како базис $|l\rangle$ припада полазном простору, то важи $\langle 0|l\rangle = 0$. Ако је R ермитска и позитивно-семидефинитна матрица, тада је и ρ ермитска позитивно-семидефинитна матрица, али је, за разлику од матрице R, трага један – што непосредно следи из (4.11в).

Отуда нека правила у проширеном простору: $[A, B] \oplus 0 = [A \oplus 0\, , B \oplus 0]$, као и $(AB) \oplus 0 = A(B \oplus 0) = (A \oplus 0)B$.

Применимо сада извод по времену на статистички оператор ρ:

$$\frac{d}{dt}\rho = \left(\frac{d}{dt}R\right)\oplus 0 - \left(\frac{d}{dt}trR\right)|0\rangle\langle 0|. \qquad (4.11е)$$

Из (4.11а,б) следи:

$$\frac{d}{dt}R\oplus 0 = -iH_{eff}(R\oplus 0) + i(R\oplus 0)H_{eff}^+ = -i[H,R]\oplus 0 - \frac{1}{2}\sum_l \gamma_l\,(|l\rangle\langle l|R)\oplus 0 - \frac{1}{2}\sum_l \gamma_l\,(R|l\rangle\langle l|)\oplus 0 = i[H,R]\oplus 0 - \frac{1}{2}\sum_l \gamma_l\,(|l\rangle\langle 0|0\rangle\langle l|)(R\oplus 0) - \frac{1}{2}\sum_l \gamma_l\,(R\oplus 0)(|l\rangle\langle 0|0\rangle\langle l|) = i[H\oplus 0, \rho] - \frac{1}{2}\sum_l L_i^+\, L_i\rho - \frac{1}{2}\sum_l \rho\, L_i^+ L_i, \qquad (4.11ж)$$

где су Линдбладијани: $L_i = \sqrt{\gamma_l}|0\rangle\langle l|$; у последњем кораку је коришћено: $[H\oplus 0, |0\rangle\langle 0|] = 0$, као и $(|l\rangle\langle 0|0\rangle\langle l|)|0\rangle\langle 0| = 0 = |0\rangle\langle 0|(|l\rangle\langle 0|0\rangle\langle l|)$.

Са друге стране, из (4.11а,б) следи и:

$\frac{d}{dt}trR = -\sum_l \gamma_l \langle l|R|l\rangle,$ (4.11з)

што непосредно даје:

$\frac{d}{dt}trR|0\rangle\langle 0| = -\sum_l \gamma_l \langle l|R|l\rangle|0\rangle\langle 0| = -\sum_l \gamma_l |0\rangle\langle l|R|l\rangle\langle 0| = -\sum_l L_l \rho L_l^+,$

(4.11и)

где је коришћено $|0\rangle\langle l|R\oplus 0|l\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle l|R|l\rangle\langle 0|$. Сменом (4.11ж) и (4.11и) у (4.11е) непосредно следи мастер једначина (4.11г).

Приметимо да је, за чисто стање, (4.11а) еквивалентно „Шредингеровој“ једначини:

$\frac{d}{dt}|\varphi\rangle = -iH_{eff}|\varphi\rangle,$ (4.11к)

која одговара линеарном, иако неунитарном динамичком пресликавању.

НАПОМЕНА: Овде представљени формализам је *изузетно моћан у примени*, видети A. E. Teretenkov, arXiv:1904.01430v1.

4.12 Двонивоски атом је у истовременој, слабој интеракцији са два независна, мултимодна ЕМ поља, оба у топлотној равнотежи на некој температури T. Нека је задат хамилтонијан целог (изолованог) система:

$H = H_{atom} + H_1 + H_2 + V_1 + V_2,$ (4.12а)

где су сопствени хамилтонијани уобичајеног облика:

$H_{atom} = \frac{\omega_0}{2}Z, H_i = \sum_k \omega_{ik}\, b_{ik}^+ b_{ik}, i = 1,2,$ (4.12б)

а интеракције су Џејнс-Камингсовог типа:

$V_i = \alpha \sum_k (\sigma_- b_{ik}^+ + \sigma_+ b_{ik}),$ (4.12в)

са бозонским операторима који задовољавају комутаторске изразе

$\left[b_{ik}, b_{i'k'}^+\right] = \delta_{ii'}\delta_{kk'};$ (4.12г)

једноставности ради стављамо исту јачину интеракције, α, за оба окружења. Доказати да се тада дисипатор у мастер једначини за атом може представити збиром два дисипатора који потичу од два независна окружења.

Решење: Ова ситуација је разматрана у Задатку 2.26 те је одговор унапред познат. Овде ћемо, као илустрацију општег разматрања спроведеног у Задатку 2.26, дати све детаље за разматрани модел атома.

Један систем под утицајем произвољног броја окружења се увек може представити да је под утицајем једног, укупног, окружења. Под стандардним претпоставкама, он може бити под Марковљевом динамиком за то укупно окружење. Овде је задатак испитати под којим условима се утицај два Марковљева окружења може једноставно „сабрати“, у смислу да је укупни дисипатор збир (Марковљевих) дисипатора који потичу од два независна окружења.

Пројективни метод (Задатак 2.2) даје формално решење за статистички оператор у општем интегралном облику за атом (зато надаље испуштамо „индекс“ „$atom$“, осим када може доћи до забуне) у интеракционој слици (h=1) [2]:

$$\rho(t) = \rho(0) - \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du\, tr_B\big[V(s), [V(s-u), \rho(s) \otimes \rho_B]\big], \qquad (4.12д)$$

где је интеракцију са укупним окружењем могуће записати као независне интеракције са два независна окружења: $V(s) = V_1(s) + V_2(s)$, док је ρ_B за укупно окружење произвољно (Задатак 2.1).

Интеракција може бити записана преко својствених оператора сопственог хамилтонијана атома у интеракционој слици дефинисаној изразом (4.12б):

$$V(s) = e^{iH_{atom}s}\sigma_- e^{-iH_{atom}s} \otimes B^+(s) + e^{iH_{atom}s}\sigma_+ e^{-iH_{atom}s} \otimes B(s) =$$
$$\Big(\sigma_-(0) + e^{i\omega_o s}\sigma_-(\omega_o) + e^{-i\omega_o s}\sigma_-(-\omega_o)\Big) \otimes B^+(s) + \Big(\sigma_+(0) + e^{i\omega_o s}\sigma_+(\omega_o) +$$
$$e^{-i\omega_o s}\sigma_+(-\omega_o)\Big) \otimes B(s),$$

где је $B(s) = B_1(s) \otimes I_2 + I_1 \otimes B_2(s) \equiv B_1(s) + B_2(s)$, и

$$e^{iH_{atom}s}\sigma_\pm e^{-iH_{atom}s} = (P_+\sigma_\pm P_+ + P_-\sigma_\pm P_-) + e^{-i\omega_0 s}P_-\sigma_\pm P_+ + e^{i\omega_0 s}P_+\sigma_\pm P_- \equiv$$
$$\sigma_\pm(0) + e^{-i\omega_o s}\sigma_\pm(\omega_o) + e^{i\omega_o s}\sigma_\pm(-\omega_o).$$

Коришћењем дефиниција $\sigma_- = |-\rangle\langle+| = \sigma_+^+, P_\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$, лако следи израз за интеракцију:

$$V(s) = e^{i\omega_0 s}\sigma_+ \otimes B(s) + e^{-i\omega_0 s}\sigma_- \otimes B^+(s). \qquad (4.12ђ)$$

Стандардни поступак извођења мастер једначине започиње записом комутатора у изразу (4.12д):

$$tr_B\left[V(s),[V(s-u),\rho(s)\otimes\rho_B]\right] = tr_B(V(s)V(s-u)\rho(s)\otimes\rho_B - V(s)\rho(s)\otimes\rho_B V(s-u) + h.c.)$$

где $h.c.$ означава члан адјунгован у односу на дати члан у изразу. Из (4.12б) следи $e^{iH_E s} = \otimes_{i=1}^{2}\otimes_k e^{i\omega_{ik}b_{ik}^{+}b_{ik}s}$, па лако следи $B(s) = e^{iH_E s}\sum_{i,k} b_{ik}\, e^{-iH_E s} = \sum_{i,k} e^{-i\omega_{ik}s} b_{ik}$. Тада $tr_B(B(s)B(s-u)\rho_B) = \sum_{i,k,i',k'} e^{-i\omega_{ik}s - i\omega_{i'k'}(s-u)} tr_B(b_{ik}b_{i'k'}\rho_B) \equiv 0$, јер за Гибсово канонско топлотно стање ρ_B важи: $tr_B(b_{ik}b_{i'k'}\rho_B) = 0, \forall i,k,i',k'$. Коришћењем ових израза као и једнакости (4.12ђ) разматрани комутаторски члан у (4.12д) постаје облика:

$$-2a_1\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right) - 2a_2\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+,\rho\}\right) + i[b_1\sigma_+\sigma_- + b_2\sigma_-\sigma_+,\rho], \qquad (4.12е)$$

где $a_i = Rez_i, b_i = Imz_i$, док $z_1 = e^{i\omega_0 u} tr_B(B^+(s)B(s-u)\rho_B), z_2 = e^{-i\omega_0 u} tr_B(B(s)B^+(s-u)\rho_B)$.

Сменом (4.12е) у (4.12д) даје израз за стање:

$$\rho(t) = \rho(0) + \alpha^2\int_0^t ds\int_0^s du\left(2a_1\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right) + 2a_2\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+,\rho\}\right) - i[b_1\sigma_+\sigma_- + b_2\sigma_-\sigma_+,\rho]\right), \qquad (4.12ж)$$

чији извод по времену води квантно-оптичкој мастер једначини за укупно окружење (у интеракционој слици):

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \gamma_1\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right) + \gamma_2\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+,\rho\}\right), \qquad (4.12з)$$

при чему интеграција по s нестаје, тј., $s \to t$ и $u \to s$, и преостала интеграција даје: $\gamma_i = \alpha^2\int_0^t ds\, a_i$ као и $H = \alpha^2\left(\int_0^t ds\, b_1\right)\sigma_+\sigma_- + \alpha^2\left(\int_0^t ds\, b_2\right)\sigma_-\sigma_+$.

Сада, користећи дефиницију $B(s) \equiv B_1(s) + B_2(s)$, долази до изражаја структура окружења. Наиме, тада:

$$z_1 = e^{i\omega_0 u} tr_E\left(\left(B_1^+(s) + B_2^+(s)\right)\left(B_1(s-u) + B_2(s-u)\right)\rho_E\right), \qquad (4.12и)$$

и аналогно за z_2.

Расписан, израз (4.12и) садржи и „мешане“ чланове типа $tr_E(B_1^+(s)B_2(s-u)\rho_E)$, али, како је успостављено Задатком 2.26, ти чланови су једнаки нули. Зато се свако z_i раздваја на два независна дела, за свако окружење понаособ:

$$z_1 = e^{i\omega_0 s}\big(tr_1(B_1^+(t)B_1(t-s)\rho_1) + tr_2(B_2^+(s)B_2(t-s)\rho_2)\big) \equiv z_{1,1} + z_{1,2},$$

и аналогно за z_2.

Наравно, отуда следе по две независне функције за сваку функцију a_1 и a_2 у изразу (4.12ж) – као и за комутаторски део који нас овде не занима. Сада прелазак са (4.12ж) на (4.12з) коначно даје, за дисипаторски део мастер једначине, два независна дисипатора (у интеракционој слици):

$$\mathcal{D}[\rho] = \mathcal{D}_1[\rho] + \mathcal{D}_2[\rho], \qquad (4.12\text{ј})$$

уз дефиниције појединачних дисипатора (изазваних појединачним окружењима):

$$\mathcal{D}_i[\rho] = \gamma_{i,1}\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}\right) + \gamma_{i,2}\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+, \rho\}\right), \qquad (4.12\text{к})$$

$$\gamma_{i,\alpha} \equiv \alpha^2 \int_0^t ds\, a_{i,\beta} \equiv \alpha^2 \int_0^t ds\, Re z_{i,\beta}, \beta = 1{,}2.$$

На крају истакнимо: у складу са Задатком 2.26, Марковљеви дисипатори се сабирају с обзиром на независне интеракције атома са међусобно независним окружењима.

4.13 Користећи модел претходног задатка, показати да присуство два окружења значајно смањује, већ пригушене, вакуумске Рабијеве осцилације двонивоског атома.

Решење: Израз (4.12к) се непосередно уопштава за свако почетно стање два окружења, све док важе услови $\big(tr_i(B_i^+(s)\rho_i)\big) = 0 = \big(tr_i(B_i(s)\rho_i)\big)$. Уопштење се тада састоји у могућности да фактори пригушења експлицитно зависе од времена.

Квантне вакуумске Рабијеве осцилације описане су у Задатку 4.1 за атом као изолован систем. Пригушене квантне вакуумске осцилације тичу се динамике двонивоског атома као отвореног система на апсолутној нули, под утицајем Марковљевог окружења, што је описано мастер једначином на нула Келвина следећом, општег облика (у интеракционој слици) једначином (4.12к) за само једно окружење, уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја:

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}\right). \qquad (4.13а)$$

Сада закључак претходног задатка, примењен на (4.13а) даје:

$$\frac{d\rho}{dt} = (\gamma_1(t) + \gamma_2(t))\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}\right), \qquad (4.13б)$$

где се појављују фактори пригушења, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, изазвани двама независним Марковљевим окружењима.

Као и обично, ако важи $Z|0\rangle = -|0\rangle, Z|1\rangle = |1\rangle$, матрични елементи статистичког оператора који задовољава (4.13б) (у интеракционој слици) воде диференцијалним једначинама:

$$\frac{d\rho_{00}}{dt} = \big(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\big)\rho_{11},$$

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = -\big(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\big)\rho_{11},$$

$$\frac{d\rho_{10}}{dt} = -\frac{\big(\gamma_1(t)+\gamma_2(t)\big)}{2}\rho_{10}. \qquad (4.13в)$$

Интеграција последње две једначине у (4.13в) је непосредна и даје $\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0)e^{-\int_0^t(\gamma_1(s)+\gamma_2(s))ds}$, $\rho_{10}(t) = \rho_{10}(0)e^{-\int_0^t ds(\gamma_1(s)+\gamma_2(s))/2}$, откуд следи и $\rho_{00}(t) = 1 - \rho_{11}(t), \forall t$. Отуда решење у матричном облику у Z-репрезентацији:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0)e^{-(\Gamma_1(t)+\Gamma_2(t))} & \rho_{10}(0)e^{-(\Gamma_1(t)+\Gamma_2(t))/2} \\ \rho_{10}(0)e^{-(\Gamma_1(t)+\Gamma_2(t))/2} & 1 - e^{-(\Gamma_1(t)+\Gamma_2(t))} + \rho_{00}(0)e^{-(\Gamma_1(t)+\Gamma_2(t))} \end{pmatrix} (4.13г)$$

где су $\Gamma_i(t) = \int_o^t \gamma_i(s)\, ds \geq 0, i = 1,2.$

Осим ако је $\rho_{10}(0) = 0$, осцилаторни члан (сразмеран ω_0) сведочи о Рабијевим осцилацијама које су у овом моделу свакако пригушене, чак и када је присутно само једно окружење. Поента задатка је у томе да друго окружење, које није „резонантно“ са првим, осетно смањује поменуте осцилације чак и на кратким временским интервалима. Ово уочавање непосредно следи из чињенице да се у експонентима експоненцијалних функција налази збир двају независних чланова (сваки од њих за по једно окружење). То јест, ненегативност функција пригушења, $\Gamma_i(t) \geq 0, \forall i, t$, имплицира: $\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) \geq \Gamma_i(t), \forall i, t$. Овиме је задатак завршен.

Као илустрацију узмимо[53]:

---

[53] C.-K. Chan et al, Phys. Rev. A **89**, 042117 (2014).

$$\gamma_i(t) = \frac{\sqrt{2\lambda_i\gamma_i}\sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{2\lambda_i\gamma_i}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{2\lambda_i\gamma_i}\right)+\sqrt{\frac{\lambda_i}{2\gamma_i}}\sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{2\lambda_i\gamma_i}\right)}, \quad \gamma_i, \lambda_i$$ су позитивне реалне константе.

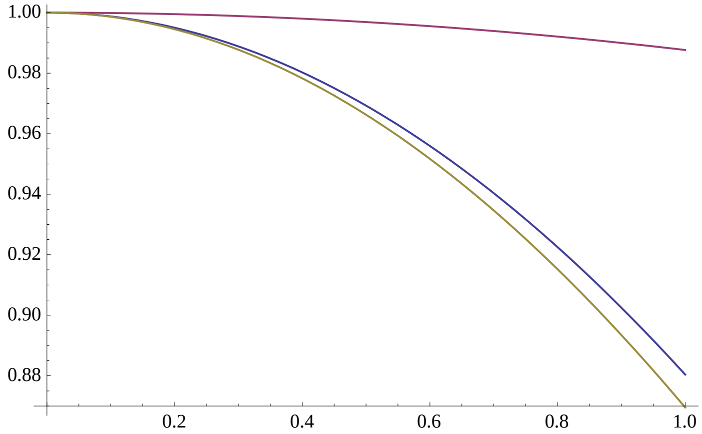
(4.13д)

Отуда:

$$\Gamma_i = \frac{C_i t \mathrm{x}_\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{Log}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{t\mathrm{x}_\mathrm{i}}{2}\right)+C_i x_i \mathrm{Sin}\left(\frac{t\mathrm{x}_\mathrm{i}}{2}\right)\right)}{1+\mathrm{C}_\mathrm{i}^2\mathrm{x}_\mathrm{i}^2}, \qquad (4.13ђ)$$

са значењем ознака: $C_i \equiv 1/2\gamma_i, x_i \equiv \sqrt{2\lambda_i\gamma_i}$.

Изаберимо вредности: $C_1x_1 = \sqrt{0.005}, C_2x_2 = 0.1$, и $x_1t \equiv \tau_1, x_2t = \sqrt{p}\tau_1, p \in [0.1,10]$, $\tau_1 \in [0,1]$. Одговарајући графички приказ за оба окружења, независно, а онда и укупно, за апсолутну вредност вандијагоналних чланова ($|\rho_{10}(0)| = 1$):



Слика 4.1 Вандијагонални елементи матрице (4.13г). Вредности параметара су наглашене у тексту изнад.

где је, без губљења општости, дат график за $p = 0.1$. Плави график се тиче првог окружења (индекс $i = 1$), а црвени другог окружења, појединачно. Жути график је за случај оба окружења.

Реченично, ово може да подсети на опште ставове теорије декохеренције, Задаци 1.13 и 1.14: што је веће окружење, бржи је и јачи утицај на отворени систем; овде би се то могло исказати речима: што је већи број *адитивих* окружења, (пригушене) квантне осцилације су јаче и ефикасније пригушене и (практично) потпуно се губе за довољно велики (али коначан) број независних окружења.

НАПОМЕНА: Сценарио у којем су окружења „резонантна“, тј. да њихови утицаји „интерферирају“, тј., не могу се представити простим збиром фактора пригушења, може се наћи у раду[54] из којег је и преузет пример (4.13д).

4.14 Задат је двочестични систем, 1+2, у произвољном почетном стању ρ. Доказати да се не могу разликовати стање ρ и $\rho' = \sum_i (P_{1i} \otimes I_2)\,\rho(P_{1i} \otimes I_2)$, осим ако ортогонални пројектори P_{1i} комутирају са $tr_2\rho$.

Решење: У Задатку 1.18 био је разматран случај чистог и њему придруженог мешаног стања, у смислу да та два стања (која се разликују само за „интерференциони“ члан, Задатак 1.1) имају исте подсистемске операторе. Овде нас занима општији случај који укључује и разликовање мешаних стања дводелне изоловане целине. Тиме је обухваћен и резултат Задатка 1.18.

По дефиницији, два стања се разликују ако предвиђају, макар за неке опсервабле, различите вероватноће мерења (тј., очекиване вредности неких опсервабли). Зато је довољно утврдити такву разлику за нека подсистемска мерења.

Разложимо стање ρ преко произвољног базиса алгебре оператора над Хилбертовим простором стања целине 1+2:

$$\rho = \sum_\alpha A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha}; \qquad (4.14а)$$

Чисто стање (полазећи од неке његове Шмитове канонске форме) је онда записано у виду (4.14а) за, на пример, $A_{1\alpha} = c_i |i\rangle_1 \langle j|, B_{2\alpha} = c_j^* |i\rangle_2 \langle j|$, где индекс α одговара фиксном пару индекса (i, j).

Сменом (4.14а) у израз за ρ' добија се:

$$\rho' = \sum_i P_{1i} \otimes I_2 \rho P_{1i} \otimes I_2 = \sum_{i,\alpha} P_{1i}\, A_{1\alpha} P_{1i} \otimes B_{2\alpha}. \qquad (4.14б)$$

Сада стања система 1 гласе:

$$\rho_1 = tr_2\rho = \sum_\alpha (tr_2 B_{2\alpha})\, A_{1\alpha},$$

$$\rho'_1 = tr_2\rho' = \sum_{i,\alpha}(tr_2 B_{2\alpha})\, P_{1i} A_{1\alpha} P_{1i} = \sum_i P_{1i}\, \rho_1 P_{1i} = \rho_1, \tag{4.14в}$$

где последња једнакост следи на основи поставке задатка, тј., да важи $[P_{1i}, \rho_1] = 0$. Тако постају јасне две ствари: под условом задатка, $[P_{1i}, \rho_1] = 0$, подсистемска мерења не могу разликовати два квантна стања (што већ знамо на основи Задатка 1.18), док, са друге стране, сва друга мерења на систему 1, тј., сви други пројектори P_{1i}, воде разликовању два стања (када $\rho_1 \neq \rho'_1$) чак и на подсистемском нивоу – мерењима локално обављеним на подсистему 1. Наравно, мерења морају бити обављена на ансамблима који одговарају датим стањима.

4.15 За подсистемска мерења уведена у претходном задатку показати да могу водити разликовању стања изолованог система 1+2 ако се дозволи одређена унитарна еволуција на том систему, чак и у случају да се та разлика не може уочити за стања у почетном тренутку. Који услов мора да испуни унитарна динамика целине да би ово важило?

Решење: Дакле, претпоставка је да се у почетном тренутку стања ρ и ρ' из претходног задатка не могу разликовати подсистемским мерењем, тј., да $[\rho(0), P_{1i}] = 0, \forall i$. Сада претпоставимо да су оба стања изложена унитарној еволуцији. Тада (4.14а) води изразима:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^+(t) = \sum_\alpha U\,(A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha})U^+,$$

$$\rho'(t) = U(t)\sum_i (P_{1i} \otimes I_2)\,(\sum_\alpha (A_{1\alpha} \otimes B_{2\alpha}))(P_{1i} \otimes I_2)U^+(t). \tag{4.15а}$$

Без губљења општости, уведимо следећу спектралну форму унитарног оператора: $U(t) = \sum_{p,q} e^{ita_p b_q} R_{1p} \otimes \Pi_{2\mathrm{q}}$. Сменом у (4.15а) добија се за подсистемске операторе система 1:

$$\rho_1(t) = tr_2\rho(t) = \sum_{p,p'} R_{1p}\, A_{1pp'}(t) R_{1p'}, \tag{4.15б}$$

где је $A_{1pp'}(t) = \sum_{\alpha,q} e^{ib_q(a_p - a_{p'})t} \left(tr_2\left(\Pi_{2\mathrm{q}} B_{2\alpha}\right)\right) A_{1\alpha}$, као и

$$\rho'_1(t) = tr_2\rho'(t) = \sum_{p,p'q,i,\alpha} e^{ib_q(a_p - a_{p'})t}\left(tr_2\left(\Pi_{2\mathrm{q}}B_{2\alpha}\right)\right)R_{1p}P_{1i}A_{1\alpha}P_{1i}R_{1p'} = \sum_{p,p'} R_{1p}\left(\sum_i P_{1i}\, A_{1pp'}(t)P_{1i}\right)R_{1p'}. \qquad (4.15в)$$

Сада услов неразличивости, $\rho'_1(t) = \rho_1(t)$, захтева $\left[P_{1i}, A_{1pp'}(t)\right] = 0, \forall i, p, p'$, као и за сваки временски тренутак. Отуда, заправо, ови услови комутирања представљају бесконачан (чак непребројив) скуп услова који морају бити истовремено испуњени – па решења нема. Тиме постаје јасно да је потврђен услов $\rho'_1(t) \neq \rho_1(t)$ за практично сваки унитарни оператор, сваки скуп пројектора $\{P_{1i}\}$, и сваки тренутак t, те да се ова два стања могу разликовати (ансамбалским) мерењем на подсистему 1, а отуда се могу разликовати и стања целине, $\rho(t)$ и $\rho'(t)$, што, због унитарне динамике целине, одговара разликовању и почетних стања целине, $\rho(0)$ и $\rho'(0)$.

Потупности ради приметимо још: (а) почетни услов ($t = 0$), $\rho'_1(0) = \sum_{i,\alpha} tr_2(B_{2\alpha})\, P_{1i}A_{1\alpha}P_{1i} = \sum_i P_{1i}\rho_1(0)P_{1i} = \rho_1(0)$, чија лева страна лако следи из (4.15в), имплицира: $\sum_{i,\alpha} tr_2(B_{2\alpha})[P_{1i}, A_{1\alpha}] = 0$, и (б) да из (4.15в), ако $\left[R_{1p}, P_{1i}\right] = 0, \forall p, i$, следи Лидерс—фон-Нојманова формула предиктивног мерења:

$$\rho'_1(t) = \sum_i P_{1i}\, \rho_1(t)P_{1i}, \qquad (4.15г)$$

која је коришћена у претходном задатку.

НАПОМЕНА: Овај и претходни задатак успостављају основу за поступак уочавања квантног дискорда (квантних корелација) само путем локалних (подсистемских) мерења. Иако одабрано мерење (које се, по претпоставци, лако остварује у лабораторији) не уводи разлику за стања у почетном тренутку. Унитарна еволуција система 1+2 уводи корелације које се тим истим мерењем могу уочити разликовањем подсистемских стања, тј., када важи $\rho_1'(t) \neq \rho_1(t)$[54]. Иначе, утврђивање корелација у дводелним системима подразумева сложена мерења целог система, што су, и сложена, и у пракси тешко остварљива мерења.

4.16 Формулисати и спровести поступак (протокол) на основи претходног задатка за локално уочавање квантног дискорда

---

[54] M. Gessner , H.-P. Breuer, PRL **107**, 180402 (2011)

сложеног система „двонивоски атом+једномодно окружење“, за случај интеракције задат, тзв., анти-Џејнс-Камингзовим хамилтонијаном:

$$H = \frac{\hbar\Omega\eta}{2}(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a), \tag{4.16а}$$

ако је почетно стање укупног система:

$$\rho_0 \equiv \rho(t=0) = |g\rangle\langle g| \otimes \sum_{n=0}^{\infty} p_n \,|n\rangle\langle n|, \tag{4.16б}$$

тј., атом је у основном стању енергије док је $|n\rangle$ стање бозонског система које је својствено за оператор броја бозона, $N = a^+a$.

Решење: „Квантни дискорд“ обухвата све квантне корелације у дводелном квантном систему у мешаном стању. Зато се задатак тиче утврђивања квантних корелација било које врсте.

Поступак сугерисан решењем Задатка 4.15 се састоји од следећих корака:

(а) За подсистемско стање атома се утврди својствени базис,

(б) Унитарна динамика се дозволи за неки интервал времена (коначни тренутак t_0) целог система (када подсистемска стања у почетном ($t=0$) и коначном (t_0) тренутку не морају бити различива),

(в) Обави се локално, мерењу-слично деловање на атом (када се временски интервал не урачунава) неке опсервабле чија су својствена стања баш својствена стања почетног (мешаног) стања атома (што је већ информација коју поседујемо, тачка (а)),

(г) Примени се унитарна динамика коришћена у тачки (б) за неки интервал времена $\tau = t_1 - t_0$, (д) Обави се локално мерење на атому у базису који је својствен за почетно стање. Различивост стања атома у тренутку t_1 од стања атома у тренутку t_0 је доказ постојања корелација у укупном систему „атом+окружење".

Из поставке задатка је јасно да је базис стања за цео систем облика $|i\rangle \otimes |n\rangle, i = g, e$, те да је базис подсистема управо $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, уз пропис: $\sigma_+|e\rangle = 0 = \sigma_-|g\rangle, \sigma_+|g\rangle = |e\rangle, \sigma_-|e\rangle = |g\rangle$. То је, уједно, и тачка (а) поступка.

Ради даљег рада неопходно је израчунати дејство динамике на базисна стања:

$$e^{-itH/h}|g\rangle \otimes |n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it\Omega\eta/2)^k}{k!} (\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)^k |g\rangle \otimes |n\rangle. \qquad (4.16в)$$

Лако се доказују једнакости:

$$(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)|g\rangle \otimes |n\rangle = \sqrt{1+n}|e\rangle \otimes |n+1\rangle \equiv \sqrt{1+n}|e\ 1+n\rangle,$$

$$(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)^2|g\rangle \otimes |n\rangle = (\sigma_+\sigma_- a^+ a + \sigma_-\sigma_+ a a^+)|g\rangle \otimes |n\rangle = (1+n)|g\ n\rangle,$$

$$(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)^3|g\rangle \otimes |n\rangle = (1+n)(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)|g\rangle \otimes |n\rangle = (1+n)^{3/2}|e\ 1+n\rangle,$$

$$(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)^4|g\rangle \otimes |n\rangle = (\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)^2(1+n)|g\ n\rangle = (1+n)^2|g\ n\rangle,$$

$$(\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)^5|g\rangle \otimes |n\rangle = (\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)(1+n)^2|g\ n\rangle = (1+n)^{5/2}|e\ 1+n\rangle,$$

(4.16г)

итд. Сакупљено и разврстано по парним и непарним степенима:

$$e^{-itH/h}|g\rangle \otimes |n\rangle = \left(1 + \frac{1}{2}\left(-i\frac{\Omega\eta}{2}t\sqrt{1+n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(-i\frac{\Omega\eta}{2}t\sqrt{1+n}\right)^4 + \cdots\right)|g\ n\rangle + \left(\left(-i\frac{\Omega\eta}{2}t\sqrt{1+n}\right) + \frac{1}{3!}\left(-i\frac{\Omega\eta}{2}t\sqrt{1+n}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(-i\frac{\Omega\eta}{2}t\sqrt{1+n}\right)^5 + \cdots\right)|e\ 1+n\rangle.$$

То јест,

$$e^{-itH/h}|g\ n\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right)|g\ n\rangle - i\sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right)|e\ 1+n\rangle, \qquad (4.16д)$$

уз скраћени запис: $\Omega_n \equiv \frac{\Omega\eta}{2}\sqrt{1+n}$.

Сада је вероватно очигледно да важи и:

$$e^{-itH/h}|e\ 1+n\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right)|e\ 1+n\rangle - i\sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right)|g\ n\rangle. \qquad (4.16ђ)$$

На основи ових израза, унитарна динамика целине (тачка (б)) сада даје:

$$\rho(t_0) = e^{-it_0H/h}\left(|g\rangle\langle g| \otimes \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, |n\rangle\langle n|\right)e^{it_0H/h} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)|g\ n\rangle - i\sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)|e\ 1+n\rangle\right)\left(\cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\langle g\ \ n| +\right.$$
$$\left. i\sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\langle e\ \ 1+n|\right), \qquad (4.16е)$$

па стање атома гласи (узимањем трага по систему бозона):

$$\rho_{atom}(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)|g\rangle\langle g\ | + \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)|e\rangle\langle e|\right). \qquad (4.16ж)$$

Тачка (в) има математички запис:

$$\rho'(t_0) = \sum_{i=g}^{e}(|i\rangle\langle i\ | \otimes I)\,\rho(t_0)(|i\rangle\langle i\ | \otimes I) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)|g\ n\rangle\langle g\ \ n| + \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)|e\ 1+n\rangle\langle e\ \ 1+n|\right). (4.16з)$$

чему одговара редуковано атомско стање већ дато изразом (4.16ж). Дакле, овде мерења на атому не би дала никакву разлику, тј., $\rho(t_0)$ = $\rho'(t_0)$, иако разлике има: за разлику од $\rho'(t_0)$, стање $\rho(t_0)$ носи квантну кохеренцију (тј. „интерференционе чланове“, Задатак 1.1 и даље) преко сабирака типа $|g\ n\rangle\langle e\ \ 1+n|$. То истовремено значи и да стање $\rho(t_0)$ носи квантне корелације, којих нема у „класично-класичном“ стању $\rho'(t_0)$. Али, истакнимо то још једном, то није могуће утврдити било каквим мерењем на атому у тренутку t_0.

Зато допустимо унитарну динамику за целину (тачка (г) поступка).

$$\rho(t_1) = e^{-\frac{i\tau H}{h}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)|g\ n\rangle - i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)|e\ 1 +$$
$$n\rangle\Big)\Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\langle g\ \ n| + i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\langle e\ \ 1+n|\Big)\Big)e^{\frac{i\tau H}{h}} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)e^{-\frac{i\tau H}{h}}|g\ n\rangle - i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)e^{-\frac{i\tau H}{h}}|e\ 1 +$$
$$n\rangle\Big)\Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\langle g\ \ n|e^{\frac{i\tau H}{h}} + i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\langle e\ \ 1+n|e^{\frac{i\tau H}{h}}\Big) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big(\Big[\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|g\ n\rangle - i\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|e\ 1+n\rangle\Big] -$$
$$i\Big[\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|e\ 1+n\rangle -$$
$$i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|g\ n\rangle\Big]\Big)\quad\Big(\Big[\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle g\ n| +$$
$$i\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle e\ 1+n|\Big] + i\Big[\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle e\ 1+n| +$$
$$i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle g\ n|\Big]\Big). \qquad \text{(4.16и)}$$

Узимањем трага по бозонском систему:

$$\rho_{atom}(t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big\{\cos^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}(t_0+t_1)\Big)|g\ n\rangle\langle g\ n| + \sin^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}(t_0+t_1)\Big)|e\ 1 +$$
$$n\rangle\langle e\ 1+n|\Big\}. \qquad \text{(4.16j)}$$

Са друге стране, унитарна еволуција стања (4.16з):

$$\rho'(t_1) = e^{-\frac{i\tau H}{h}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big(\cos^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)|g\ n\rangle\langle g\ \ n| + \sin^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)|e\ 1 +$$
$$n\rangle\langle e\ \ 1+n|\Big)\Big)e^{\frac{i\tau H}{h}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big(\cos^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)e^{-\frac{i\tau H}{h}}|g\ n\rangle\langle g\ \ n|e^{\frac{i\tau H}{h}} +$$
$$\sin^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)e^{-\frac{i\tau H}{h}}|e\ 1+n\rangle\langle e\ \ 1+n|e^{\frac{i\tau H}{h}}\Big).$$
$$\text{(4.16к)}$$

Коришћењем (4.16д,ђ) следи:

$$\rho'(t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big(\cos^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\Big[\Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|g\ n\rangle - i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|e\ 1 +$$
$$n\rangle\Big)\Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle gn| + i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle e\ 1+n|\Big)\Big] +$$
$$\sin^2\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_0\Big)\Big[\Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|e\ 1+n\rangle - i\sin\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)|g\ n\rangle\Big)\Big(\cos\Big(\frac{\Omega_n}{2}t_1\Big)\langle e\ 1+n| +$$

$$i\sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right)\langle g\, n|\Big)\Big]\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big\{\Big(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right) +$$

$$\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right)\Big)|g\, n\rangle\langle gn| + \Big(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right) +$$

$$\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right)\Big)|e\ 1+n\rangle\langle e\ 1+n| +$$

$$\frac{i}{2}\cos(\Omega_n t_0)\sin(\Omega_n t_1)\,|g\, n\rangle\,\langle e\ 1+n| - \frac{i}{2}\cos(\Omega_n t_0)\sin(\Omega_n t_1)|e\ 1+n\rangle\ \langle g\, n|\Big\}. \tag{4.16л}$$

Узимањем трага по бозонском систему се добија:

$$\rho'_{atom}(t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big\{\Big(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right) +$$

$$\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right)\Big)|g\,\rangle\langle g| + \Big(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right) +$$

$$\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right)\Big)|e\,\rangle\langle e\,|\Big\}. \tag{4.16љ}$$

Тако се може формулисати тачка (д) протокола: мерење попуњености побуђеног нивоа атома, $\langle e| * |e\rangle$, у тренутку t_1 открива разлику два подсистемска стања, (4.16ј) и (4.16љ), а отуда и разлика стања целине у тренутку t_0. То јест, тако се може утврдити постојање дискорда у стању $\rho(t_0)$, и то само локалним мерењем (мерењем на подсистему – овде на унутрашњим степенима слободе атома). Поменута разлика:

$$\langle e|\rho_{atom}(t_1)|e\rangle - \langle e|\rho'_{atom}(t_1)|e\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Big[\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}(t_0+t_1)\right) -$$

$$\Big(\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right) + \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_0\right)\cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t_1\right)\Big)\Big] =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin(\Omega_n t_0)\sin(\Omega_n t_1) \neq 0 \tag{4.16м}$$

те $\rho(t_1) \neq \rho'(t_1)$, а одатле следи закључак о постојању корелација (овде: дискорда) у стању $\rho(t_0)$ које, у тренутку t_0, нису могле бити откривене било каквим локалним мерењем.

НАПОМЕНА: Мерења у базису који није својствени базис почетног стања не мора водити разлици подсистемских стања. Исто тако, мерења попуњености основног нивоа не доносе разлику подсистемских, а отуда ни стања целине, тј., не открива присуство корелација (дискорда) у стању $\rho(t_0)$. Физичка релевантност анти-Џејнс-Камингсовог модела, детаљи овде представљеног поступка као и његове експерименталне реализације, се могу наћи у кратком прегледном раду[55].

4.17 Доказати да је диференцијална једначина за први момент произвољног оператора A за мастер једначину Калдеире-Легета облика:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{h}\langle[A,H]\rangle + \frac{i\gamma}{h}\langle\{p,[x,A]\}\rangle - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\big\langle\big[x,[x,A]\big]\big\rangle; \quad (4.17а)$$

средње заграде означавају комутатор, а витичасте заграде антикомутатор.

Решење: Мастер једначина Калдеире-Легета (КЛ) за једнодимензионалну честицу масе m у контакту са топлотним купатилом на температури T, уз фактор пригушења $\gamma > 0$, је облика:

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{h}[H,\rho] - \frac{i\gamma}{h}[x,\{p,\rho\}] - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\big[x,[x,\rho]\big]. \qquad (4.17б)$$

Очекивана вредност (први „момент“) произвољне опсервабле A, $\langle A\rangle = trA\rho$, што коришћењем (4.17б) у Шредингеровој слици даје:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = tr\left(A\frac{d}{dt}\rho\right) = tr\ \left\{A\left(-\frac{i}{h}[H,\rho] - \frac{i\gamma}{h}[x,\{p,\rho\}] - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\big[x,[x,\rho]\big]\right)\right\}.$$

(4.17в)

Сада члан по члан:

$$tr(A[H,\rho]) = tr(AH\rho - A\rho H) = tr([A,H]\rho) \equiv \langle[A,H]\rangle, \qquad (4.17г)$$

где је коришћено (и у остатку задатка ће бити коришћено) комутирање под операцијом трага.

$$tr(A[x,\{p,\rho\}]) = tr([A,x]\{p,\rho\}) = tr([A,x]p\rho + [A,x]\rho p) = tr\big(([A,x]p + p[A,x])\rho\big) = -\langle\{p,[x,A]\}\rangle. \qquad (4.17д)$$

Коначно:

---

[55] M. Gessner et al, arXiv:1606.09049 [quant-ph], DOI: 10.1007/978-3-319-53412-1_14.

$$tr\big(A\big[x,[x,\rho]\big]\big) = tr([A,x][x,\rho]) = tr\big(([A,x]x - x[A,x])\rho\big) = \langle\big[[A,x],x\big]\rangle. \tag{4.17ђ}$$

Сменом ових израза у горњи израз за $\frac{d}{dt}\langle A\rangle$ добија се израз (4.17а).

4.18 Коришћењем резултата претходног задатка, извести и решити диференцијалне једначине до момената другог реда за положај и импулс слободне, квантне Браунове честице.

Решење: Користимо израз:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{h}\langle[A,H]\rangle + \frac{i\gamma}{h}\langle\{p,[x,A]\}\rangle - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\langle\big[x,[x,A]\big]\rangle. \tag{4.18а}$$

Како је $H = p^2/2m$, следе комутатори: $[x,H] = ih\,p/m$, $[p,H] = 0$, $[p^2,H] = 0$, $[x^2,H] = ih(xp+px)/m$, $[xp+px,H] = 2ihp^2/m$.

Отуда скуп диференцијалних једначина:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = -\frac{i}{h}ih\frac{\langle p\rangle}{m} = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = +\frac{i\gamma}{h}2ih\langle p\rangle = -2\gamma\langle p\rangle$$

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = -\frac{i}{h}\frac{ih}{m}\langle xp+px\rangle = \frac{1}{m}\langle xp+px\rangle$$

$$\frac{d\langle xp+px\rangle}{dt} = -\frac{i}{h}2ih\frac{\langle p^2\rangle}{m} + \frac{i\gamma}{h}2ih\langle xp+px\rangle = 2\frac{\langle p^2\rangle}{m} - 2\gamma\langle xp+px\rangle$$

$$\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = \frac{i\gamma}{h}2ih2\langle p^2\rangle - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}2(ih)^2 = -4\gamma\langle p^2\rangle + 4m\gamma k_B T\ . \tag{4.18б}$$

Овај скуп једначина се раздваја на два, међусобно независна, подскупа једначина – за прве, и за друге моменте, независно једне од других. Други скуп једначина (за моменте другог реда) је нехомоген – постоји слободни члан: $4m\gamma k_B T$.

Решавање једначина за прве моменте је једноставно. Решење друге једначине очигледно гласи:

$$\langle p(t)\rangle = \langle p(0)\rangle e^{-2\gamma t}, \tag{4.18в}$$

што сменом у прву једначину, после интеграљења даје:

$$\langle x(t)\rangle = -\frac{\langle p(0)\rangle}{2\gamma m} e^{-2\gamma t} + C, \tag{4.18г}$$

а што после увођења почетног услова за положај, $\langle x(0)\rangle$, даје решење:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle + \frac{\langle p(0)\rangle}{2m\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}). \tag{4.18д}$$

Сличан поступак се може применити и на систем једначина за друге моменте. То ће овде бити учињено у матричном облику, у складу са (2.4в). То јест, представимо систем једначина за друге моменте у матричном облику, где је задат транспоновани вектор, $X^T = (\langle x^2\rangle, \langle xp + px\rangle, \langle p^2\rangle)$:

$$\frac{d}{dt} X = \mathcal{M}X + N. \tag{4.18ђ}$$

Из диференцијалних једначина непосредно читамо матрицу система и нехомогени део:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 \\ 0 & -2\gamma & 2/m \\ 0 & 0 & -4\gamma \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4m\gamma k_B T \end{pmatrix}. \tag{4.18е}$$

Интегрални облик система једначина, еквивалентан диференцијалном, дат је изразом:

$$X(t) = e^{\mathcal{M}t} X(0) + \int_0^t e^{\mathcal{M}(t-s)} N(s)\, ds. \tag{4.18ж}$$

Како је нехомогени члан константан, интеграција у другом члану даје решење у облику:

$$X(t) = e^{\mathcal{M}t} X(0) + \left(\int_0^t e^{\mathcal{M}(t-s)}\, ds\right) N. \tag{4.18з}$$

Потребни изрази гласе:

$$e^{\mathcal{M}t} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-2\gamma t}}{2m\gamma} & \frac{e^{-2\gamma t}\sinh^2\gamma t}{m^2\gamma^2} \\ 0 & e^{-2\gamma t} & \frac{e^{-2\gamma t}-e^{-4\gamma t}}{m\gamma} \\ 0 & 0 & e^{-4\gamma t} \end{pmatrix} \qquad (4.18и)$$

$$\int_0^t e^{\mathcal{M}(t-s)}\,ds = \begin{pmatrix} t & \frac{2\gamma t+e^{-2\gamma t}-1}{4m\gamma^2} & \frac{4\gamma t+4e^{-2\gamma t}-e^{-4\gamma t}-3}{16m^2\gamma^2} \\ 0 & \frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma} & \frac{e^{-2\gamma t}\sinh^2\gamma t}{m\gamma^2} \\ 0 & 0 & \frac{1-e^{-4\gamma t}}{4\gamma} \end{pmatrix}. \qquad (4.18j)$$

Сменом (4.18и,j) дају (4,18з) у матричном облику:

$$X(t) \\ = \begin{pmatrix} \frac{-mk_BTe^{-4\gamma t} + 2m\gamma(2m\gamma\langle x^2(0)\rangle + \langle xp+px\rangle_0) + mk_BT(4\gamma t-3) + e^{-2\gamma t}(4mk_BT - 2m\gamma\langle xp+px\rangle_0 + 4\langle p^2(0)\rangle\sinh^2\gamma t)}{4m^2\gamma^2} \\ \frac{\langle p^2(0)\rangle e^{-2\gamma t}(1-e^{-2\gamma t}) + m\gamma\langle xp+px\rangle_0 e^{-2\gamma t} - mk_BT(1-e^{-2\gamma t})^2}{m\gamma} \\ mk_BT(1-e^{-4\gamma t}) + \langle p^2(0)\rangle e^{-4\gamma t} \end{pmatrix}$$

Сваки члан у горњој матрици колони представља решење за одговарајућу величину. Сређено, добијају се решења:

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle x^2(0)\rangle + \frac{1-e^{-2\gamma t}}{2m\gamma}\langle xp+px\rangle_0 + \left(\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2m\gamma}\right)^2\langle p^2(0)\rangle + \frac{k_BT}{m\gamma^2}\Big(\gamma t - (1-e^{-2\gamma t}) + \frac{1}{4}(1-e^{-4\gamma t})\Big), \langle xp+px\rangle_t = e^{-2\gamma t}\langle xp+px\rangle_{t=0} + \frac{e^{-2\gamma t}-e^{-4\gamma t}}{m\gamma}\langle p^2(0)\rangle + \frac{k_BT}{\gamma}(1-e^{-2\gamma t})^2,$$

$$\langle p^2(t)\rangle = \langle p^2(0)\rangle e^{-4\gamma t} + mk_BT(1-e^{-4\gamma t})\ . \qquad (4.18к)$$

4.19 Коришћењем резултата Задатка 4.17, извести и решити диференцијалне једначине до момената другог реда за хармонијски осцилатор.

Решење: Користимо израз:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{h}\langle [A,H]\rangle + \frac{i\gamma}{h}\langle\{p,[x,A]\}\rangle - \frac{2m\gamma k_BT}{h^2}\langle\big[x,[x,A]\big]\rangle, \qquad (4.19а)$$

где је H хамилтонијан ЛХО-а. Уопштимо разматрање, пишући $H = {p^2}/_{2m} + V(x)$, за произвољни спољашњи (временски независни) потенцијал који зависи само од положаја честице.

Тада се појављују следећи комутатори: $[x, H] = ihp/m$, $[p, H] = -ihV'$, $[x^2, H] = ih(xp + px)/m$, $[xp + px, H] = \frac{2ihp^2}{m} - 2ihxV'$, $[p^2, H] = -ih(pV' + V'p)$, где $V' = \partial V/\partial x$. Отуд следе диференцијалне једначине за честицу у произвољном спољашњем пољу V:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\langle V'\rangle - 2\gamma\langle p\rangle$$

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle xp + px\rangle$$

$$\frac{d\langle xp+px\rangle}{dt} = \frac{2}{m}\langle p^2\rangle - 2\langle xV'\rangle - 2\gamma\langle xp + px\rangle$$

$$\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = -4\gamma\langle p^2\rangle - \langle pV' + V'p\rangle + 4m\gamma k_B T. \qquad (4.19б)$$

Смењујући $V = m\omega^2 x^2/2$ и $V' = m\omega^2 x$ у горњи систем једначина, опет се појављују два независна система једначина, као и у претходном задатку. За моменте првог реда:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -m\omega^2\langle x\rangle - 2\gamma\langle p\rangle \qquad (4.19в)$$

и за моменте другог реда:

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle xp + px\rangle$$

$$\frac{d\langle xp+px\rangle}{dt} = \frac{2}{m}\langle p^2\rangle - 2m\omega^2\langle x^2\rangle - 2\gamma\langle xp + px\rangle$$

$$\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = -4\gamma\langle p^2\rangle - m\omega^2\langle px + xp\rangle + 4m\gamma k_B T. \qquad (4.19г)$$

Решавање за прве моменте је опет једноставно, али ћемо ми и овде користити матрични поступак. Како је систем хомоген, довољно је знати матрицу:

$$\mathscr{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \tag{4.19д}$$

одакле следи решење у векторском облику:

$$X(t) = e^{\mathscr{m}t}X(0) = \begin{pmatrix} e^{-t\gamma}\left(\text{Cosh}t\Omega + \frac{\gamma\text{Sinh}t\Omega}{\Omega}\right) & \frac{e^{-t\gamma}\sinh\Omega\text{t}}{m\Omega} \\ -\frac{e^{-\gamma t}\sinh\Omega\text{tm}\omega^2}{\Omega} & e^{-t\gamma}\left(\text{Cosh}t\Omega - \frac{\gamma\text{Sinh}t\Omega}{\Omega}\right) \end{pmatrix}\text{X}(0).$$

То јест, решења за прве моменте:

$$\langle x(t)\rangle = e^{-\gamma t}\left(\langle x(0)\rangle\left(\cosh\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sinh\Omega t\right) + \frac{\langle p(0)\rangle}{m\Omega}\sinh\Omega t\right),$$

$$\langle p(t)\rangle = e^{-\gamma t}\left(\langle p(0)\rangle\left(\cosh\Omega t - \frac{\gamma}{\Omega}\sinh\Omega t\right) - \frac{m\omega^2}{\Omega}\langle x(0)\rangle\sinh\Omega t\right), \tag{4.19ђ}$$

где је стављено: $\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$.

Из система једначина за друге моменте следи матрица:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 \\ -2m\omega^2 & -2\gamma & 2/m \\ 0 & -m\omega^2 & -4\gamma \end{pmatrix}, \tag{4.19е}$$

као и нехомогени члан као и у претходном задатку.

Запис експоненцијалне матрице, а посебно члана уз нехомогени део, је превелики за представљање па овде неће бити експлицитно дат. Истим поступком као у претходном задатку, после сређивања израза, добијају се решења:

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{k_BT}{m\omega^2\Omega^2}\left(\Omega^2 + e^{-2\gamma t}(\omega^2 - \gamma^2\cosh(2\Omega\text{t}) - \gamma\Omega\sinh(2\Omega\text{t}))\right) +$$
$$\frac{\langle x^2(0)\rangle}{\Omega^2}e^{-2\gamma t}(-\omega^2\cosh^2(\Omega\text{t}) + \gamma^2\cosh(2\Omega\text{t}) + \gamma\Omega\sinh(2\Omega\text{t})) +$$
$$\frac{\langle p^2(0)\rangle}{m^2\Omega^2}e^{-2\gamma t}\sinh^2(\Omega\text{t}) + \frac{\langle xp+px\rangle_0}{2m\Omega^2}e^{-2\gamma t}(2\gamma\sinh^2(\Omega\text{t}) + \Omega\sinh(2\Omega\text{t})),$$

$$\langle xp+px\rangle_t = e^{-2\gamma t}\left(\frac{4\gamma k_B T}{\Omega^2}+\frac{\langle p^2(0)\rangle}{\mathrm{m}\Omega^2}(-2\gamma\sinh^2(\Omega\mathrm{t})+\Omega\sinh(2\Omega\mathrm{t}))-\right.$$

$$\left.\frac{m\omega^2}{\Omega^2}\langle x^2(t)\rangle(2\gamma\sinh^2(\Omega\mathrm{t})+\Omega\sinh(2\Omega\mathrm{t}))-\frac{\langle xp+px\rangle_0}{\Omega^2}(\omega^2\cosh(2\Omega\mathrm{t})-\gamma^2)\right),$$

$$\langle p^2(t)\rangle = \frac{mk_B T}{\Omega^2}(-\omega^2(1-e^{-2\gamma t})+\gamma^2(1-e^{-2\gamma t}\cosh(2\Omega\mathrm{t}))-$$

$$\gamma\Omega e^{-2\gamma t}\sinh(2\Omega\mathrm{t}))+\frac{\langle p^2(0)\rangle}{\Omega^2}e^{-2\gamma t}(-\omega^2\cosh^2(\Omega\mathrm{t})+\gamma^2\cosh(2\Omega\mathrm{t})-$$

$$\gamma\Omega\sinh(2\Omega\mathrm{t}))+\frac{m^2\omega^4}{\Omega^2}\langle x^2(0)\rangle e^{-2\gamma t}\sinh^2(\Omega\mathrm{t})+$$

$$\frac{m\omega^2\langle xp+px\rangle}{2\Omega^2}e^{-2\gamma t}(2\gamma\sinh^2(\Omega\mathrm{t})-\Omega\sinh(2\Omega\mathrm{t})).$$

4.20 Коришћењем резултата Задатка 4.17, извести и решити диференцијалне једначине до момената другог реда за честицу у спољашњем пољу које је благо нехармонијско.

Решење: Користимо израз:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{h}\langle[A,H]\rangle+\frac{i\gamma}{h}\langle\{p,[x,A]\}\rangle-\frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\langle\big[x,[x,A]\big]\rangle\,, \qquad (4.20\text{а})$$

где је хамилтонијан кубног типа:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+bx^3,\ b\ll m\omega^2. \qquad (4.20\text{б})$$

Сменом $V'=m\omega^2x+3bx^2$ у израз (4.19б), добија се следећи скуп повезаних диференцијалних једначина до момената другог реда:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt}=\frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt}=-m\omega^2\langle x\rangle-2\gamma\langle p\rangle-3b\langle x^2\rangle$$

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt}=\frac{1}{m}\langle xp+px\rangle$$

$$\frac{d\langle xp+px\rangle}{dt}=\frac{2}{m}\langle p^2\rangle-2m\omega^2\langle x^2\rangle-2\gamma\langle xp+px\rangle-6b\langle x^3\rangle$$

$$\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = -4\gamma\langle p^2\rangle - m\omega^2\langle px + xp\rangle - 3b\langle x^2p + px^2\rangle + 4m\gamma k_B T. \qquad \text{(4.20в)}$$

Из израза (4.20в) је очигледно да овај систем једначина *није затворен* – неке од једначина садрже моменте вишег реда; може се показати да то важи за сваки скуп једначина за моменте произвољног реда.

Не постоји општи математички поступак за решавање оваквог система једначина који је у нашем случају бесконачан скуп. Да би се уопште могло решавати, такав систем се допуњује условима (или физичким претпоставкама) које би систем могле учинити затвореним.

Претпоставка да је кубни члан у потенцијалу мали (тј., представља пертурбацију хармонијског потенцијала), омогућује пертурбативно-сличан поступак. Наиме, потражимо решења за моменте који би били облика Тејлоровог реда:

$$A_i(b,t) = A_i(b=0,t) + f_i(b,t) = A_i(b=0,t) + bf_i^{(1)} + b^2 f_i^{(2)} + \cdots. \text{(4.20г)}$$

Сменом у горњи систем једначина добија се нови систем повезаних диференцијалних једначина за „прве поправке“:

$$\frac{df_1^{(1)}}{dt} = \frac{1}{m} f_2^{(1)},$$

$$\frac{df_2^{(1)}}{dt} = -m\omega^2 f_1^{(1)} - 2\gamma f_2^{(1)} - 3\langle x^2\rangle_{b=0},$$

$$\frac{df_3^{(1)}}{dt} = \frac{1}{m} f_4^{(1)},$$

$$\frac{df_4^{(1)}}{dt} = -2m\omega^2 f_3^{(1)} - 2\gamma f_4^{(1)} + \frac{2}{m} f_5^{(1)} - 6\langle x^3\rangle_{b=0},$$

$$\frac{df_5^{(1)}}{dt} = -m\omega^2 f_4^{(1)} - 4\gamma f_5^{(1)} - 3\langle x^2p + px^2\rangle_{b=0}. \qquad \text{(4.20д)}$$

Индекс „$b = 0$“ означава решења која се тичу чисто хармонијског потенцијала разматраног у претходном задатку, у ком случају је систем једначина за моменте сваког реда затворен.

Матрица и вектор нехомогеног дела за прве моменте дати су изразима:

$$\mathscr{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\langle x^2 \rangle_{b=0} \end{pmatrix}, \tag{4.20ђ}$$

док за моменте трећег реда оне гласе:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 \\ -2m\omega^2 & -2\gamma & 2/m \\ 0 & -m\omega^2 & -4\gamma \end{pmatrix}, K' = \begin{pmatrix} 0 \\ -6\langle x^3 \rangle_{b=0} \\ -3\langle x^2 p + p x^2 \rangle_{b=0} \end{pmatrix}. \tag{4.20е}$$

Како су аналитичка решења за $\langle x^3 \rangle_{b=0}$ и $\langle x^2 p + p x^2 \rangle_{b=0}$ преобимна за представљање, ниже ће бити дата експлицитна решења само за прве поправке првих момената, тј., за $f_1^{(1)}$ и $f_2^{(1)}$.

Примена поступка представљеног у претходном задатку даје коначна решења за тражене поправке:

$$\begin{aligned}
&f_1^{(1)} = 3\left(-\frac{1}{m\omega^2} + \frac{e^{-\gamma t}}{m\omega^2}\left(\cosh \Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sinh \Omega t\right)\right)\Bigg(\frac{k_B T}{m\omega^2} + \\
&\frac{e^{-2\gamma t}(\langle p(0)\rangle^2 + (\Delta p(0))^2)}{m^2\Omega^2}\sinh^2 \Omega t + \frac{e^{-2\gamma t}(2\langle x(0)\rangle\langle p(0)\rangle^2 + \langle xp + px\rangle_{t=0})}{2m\Omega^2}(2\gamma \sinh^2 \Omega t + \\
&\Omega \sinh 2\Omega t) + \frac{e^{-2\gamma t}(\langle x(0)\rangle^2 + (\Delta x(0))^2)}{\Omega^2}(-\omega^2 \cosh^2 \Omega t + \gamma^2 \cosh 2\Omega t + \\
&\gamma\Omega \sinh 2\Omega t) + \frac{k_B T e^{-2\gamma t}}{m\omega^2\Omega^2}(\omega^2 - \gamma^2 \cosh 2\Omega t - \gamma\Omega \sinh 2\Omega t)\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_2^{(1)} = -\frac{3e^{-3\gamma t}}{2m^2\omega^2\Omega^3}\sinh \Omega t \Big(2\omega^2(\langle p(0)\rangle^2 + (\Delta p(0))^2)\sinh^2 \Omega t + \\
&2m^2\omega^2(\langle x(0)\rangle^2 + (\Delta x(0))^2)(-\omega^2 \cosh^2 \Omega t + \gamma^2 \cosh 2\Omega t + \gamma\Omega \sinh 2\Omega t) + \\
&m\big(2k_B T\gamma^2(e^{2\gamma t} - \cosh 2\Omega t) + 2\gamma(\omega^2(2\langle x(0)\rangle\langle p(0)\rangle + \langle xp + \\
&px\rangle_{t=0})\sinh^2 \Omega t - k_B T\Omega \sinh 2\Omega t) - \omega^2(2k_B T(e^{2\gamma t} - 1) - \Omega(2\langle x(0)\rangle\langle p(0)\rangle + \\
&\langle xp + px\rangle_{t=0})\sinh 2\Omega t)\big)\Big). \text{ (4.20ж)}
\end{aligned}$$

4.21 Извести и решити диференцијалне једначине за прве и друге моменте у декохеренцијском („без-трењском“) лимиту Калдеира-Легетове мастер једначине за: (а) слободну честицу, и (б) ЛХО.

Решење: Декохеренцијски лимит (без члана који одговара трењу, тј., дисипацији – енг.: “*recoilless limit*”) за КЛ мастер једначину гласи:

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{h}[H,\rho] - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\big[x,[x,\rho]\big], \tag{4.21а}$$

одакле (в. и израз (4.17а)) одмах следе и изрази:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{h}\langle[A,H]\rangle - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\langle\big[x,[x,A]\big]\rangle. \tag{4.21б}$$

У Задатку 3.18 разматран је исти модел, само без првог члана (унитарног члана) са десне стране мастер једначине. Овде ће бити спроведено строжије разматрање.

Спровођењем поступка из претходна два задатка, следи систем затворених једначина до момената другог реда:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\langle V'\rangle$$

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle xp + px\rangle$$

$$\frac{d\langle xp+px\rangle}{dt} = \frac{2}{m}\langle p^2\rangle - 2\langle xV'\rangle$$

$$\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = -\langle pV' + V'p\rangle + 4m\gamma k_B T. \tag{4.21в}$$

(а) За слободну честицу $V = 0$, па се моменти првог реда тривијално израчунавају:

$$\langle x(t)\rangle = \frac{\langle p(0)\rangle}{m}t,$$

$$\langle p(t)\rangle = \langle p(0)\rangle.$$

Из једначина за друге моменте следи матрица и нехомогени члан:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 2/m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4m\gamma k_B T \end{pmatrix}. \qquad (4.21г)$$

Решења за друге моменте гласе:

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2(0) \rangle + \frac{\langle xp + px \rangle_{t=0}}{m} t + \frac{\langle p^2(0) \rangle}{m^2} t^2 + \frac{4\gamma k_B T}{3m} t^3,$$

$$\langle xp + px \rangle = \langle xp + px \rangle_{t=0} + \frac{2t}{m} \langle p^2(0) \rangle + \frac{t^2}{m} 4\gamma k_B T,$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle p^2(0) \rangle + 4m\gamma k_B T t. \qquad (4.21д)$$

(б) Матрица за прве моменте:

$$\mathscr{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

води решењима:

$$\langle x \rangle = \langle x(0) \rangle \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \langle p(0) \rangle \sin \omega t,$$

$$\langle p \rangle = -m\omega \sin \omega t \, \langle x(0) \rangle + \langle p(0) \rangle \cos \omega t,$$

док матрица и нехомогени члан за друге моменте гласе:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 \\ -2m\omega^2 & 0 & 2/m \\ 0 & -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4m\gamma k_B T \end{pmatrix}. \qquad (4.21ђ)$$

Отуда су решења за моменте другог реда облика:

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2(0) \rangle \cos^2 \omega t + \frac{\langle p^2(0) \rangle}{m^2 \omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{\langle xp + px \rangle_{t=0}}{2m\omega} \sin 2\omega t + \frac{2\gamma k_B T}{m\omega^2} t - \frac{\gamma k_B T}{m\omega^3} \sin 2\omega t,$$

$$\langle xp + px \rangle = -m\omega \sin 2\omega t \, \langle \mathrm{x}^2(0) \rangle + \langle xp + px \rangle_{t=0} \cos 2\omega t + \frac{\sin 2\omega t}{m\omega} \langle \mathrm{p}^2(0) \rangle + \frac{4m\gamma k_B \mathrm{T}}{\omega^2} \sin^2 \omega t,$$

$$\langle p^2\rangle = \langle p^2(0)\rangle \cos^2 \omega t + m^2\omega^2\langle x^2(0)\rangle \sin^2 \omega t - \frac{1}{2} m\omega\langle xp + px\rangle_{t=0} \sin 2\omega t + 2m\gamma k_B T t + \frac{m\gamma k_B T}{\omega} \sin 2\omega t. \qquad (4.21e)$$

4.22 Упоредити егзактни квантни и декохеренцијски израз за Δx са одговарајућим класичним изразом за хармонијску Браунову честицу.

Решење: Класични израз за стандардно одступање следи из егзактног квантног израза када се у њега ставе, класично дозвољена, нулта почетна одступања, $\Delta x(0) = 0 = \Delta p(0)$. Наравно, декохеренцијски модел нема класичног аналогона[56].

Без губљења општости, изаберимо $\langle x(0)\rangle = 0 = \langle p(0)\rangle$, што води једнакости $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle}$. Не заборавимо да су вредности за масу веома различите за квантне изразе. Зато ћемо засебно упоређивати егзактни и декохеренцијски квантни израз са одговарајућим класичним изразима.

Позајмљујући из претходних задатака:

$$\langle x^2(t)\rangle_{exact} = \frac{k_B T}{m\omega^2\Omega^2}\left(\Omega^2 + e^{-2\gamma t}(\omega^2 - \gamma^2 \cosh(2\Omega\mathrm{t}) - \gamma\Omega \sinh(2\Omega\mathrm{t}))\right) + \frac{\langle x^2(0)\rangle}{\Omega^2} e^{-2\gamma t}(-\omega^2 \cosh^2 \Omega\mathrm{t} + \gamma^2 \cosh(2\Omega\mathrm{t}) + \gamma\Omega \sinh(2\Omega\mathrm{t})) + \frac{\langle p^2(0)\rangle}{m^2\Omega^2} e^{-2\gamma t} \sinh^2(\Omega\mathrm{t}) + \frac{\langle xp+px\rangle_0}{2m\Omega^2} e^{-2\gamma t}(2\gamma \sinh^2(\Omega\mathrm{t}) + \Omega \sinh(2\Omega\mathrm{t})),$$

$$\langle x^2\rangle_{decoher} = \langle x^2(0)\rangle \cos^2 \omega t + \frac{\langle p^2(0)\rangle}{m^2\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{\langle xp+px\rangle_{t=0}}{2m\omega} \sin 2\omega t + \frac{2\gamma k_B T}{m\omega^2} t - \frac{\gamma k_B T}{m\omega^3} \sin 2\omega t, \qquad (4.22a)$$

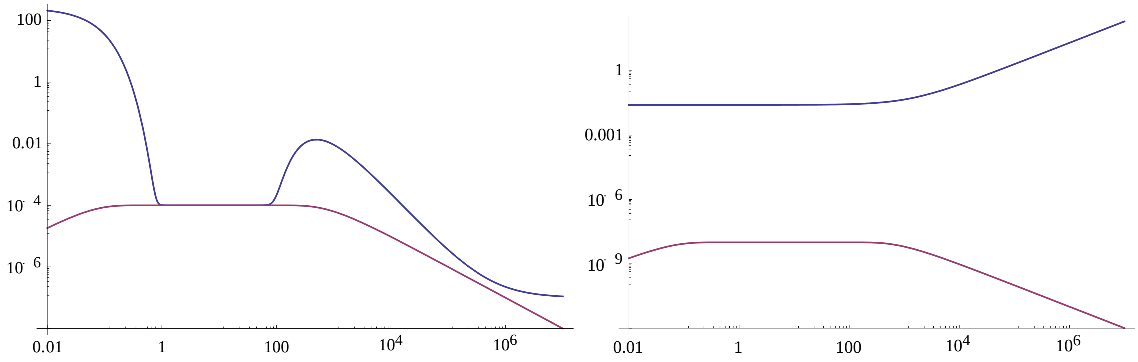
$$\langle x^2(t)\rangle_{classical} = \frac{k_B T}{m\omega^2\Omega^2}\left(\Omega^2 + e^{-2\gamma t}(\omega^2 - \gamma^2 \cosh(2\Omega\mathrm{t}) - \gamma\Omega \sinh(2\Omega\mathrm{t}))\right).$$

На (*log-log*) графику лево, слика 4.2, приказано је поређење квантног егзактног са класичним, а на графику десно поређење декохеренцијског израза са класичним; сви параметри су исти, $(\Delta x)^2 = 10^{-7}, (\Delta p)^2 = 10^7, \langle xp + px\rangle_0 = 0{,}01$, $t = 10, \omega = 10, k_B T = 0.1$, осим масе, тј., $m = 10$

---

[56] J. Jeknić-Dugić *et al*, J. Phys.: Condens. Matter **30,** 195304 (2018).

(леви график) и $m = 1000$ (десни график), док је водоравна оса за $\gamma\epsilon[0.01, 10^7]$, а усправна оса је за $\langle x^2(t)\rangle$. Уочљиво је потпуно одступање декохеренцијског израза од класичног.



Слика 4.2 Поређење израза датих у изразу (4.22a): (лево) Егзактни квантни и класични изрази ($t = 10, \omega = 10, k_B T = 0.1, m = 10$), и (десно) Егзактни класични и квантни декохеренцијски изрази ($t = 10, \omega = 10, k_B T = 0.1, m = 1000$).

Уочљива су и бројчано мала одступања екзактног квантног од класичног израза на графику лево (осим за мало γ).

Отуда и закључак: егзактно квантно понашање је типично близу класичног, те се квантни ефекти могу занемарити у неким физичким ситуацијама које би требало пажљиво одабрати (не само избором вредности за γ). Са друге стране, а у извесној супротности са интуицијом сугерисаном у оквирима теорије декохеренције, процес декохеренције не даје, чак ни приближно, познато класично понашање. Отуда закључујемо: *процес декохеренције је потребан, али не и довољан услов за класичну динамику*, макар у Калдеира-Легет моделу хармонијског Брауновог кретања.

4.23 За гаусијанске системе, Задатак 2.18, може се показати да је најопштија мастер једначина у интеракционој слици облика[57]:

$$\frac{d\rho}{dt} = \Gamma_{jk}\left[A_j,[A_k,\rho]\right] + \Theta_{jk}\left[A_j,\left[\dot{A}_k,\rho\right]\right] + i\Xi_{jk}\left[A_j,\{A_k,\rho\}\right] +$$
$$i\Upsilon_{jk}\left[A_j,\left\{\dot{A}_k,\rho\right\}\right] \qquad (4.23а)$$

са реалним множиоцима комутатора; угласте заграде означавају комутаторе, а витичасте антикомутаторе. Опсервабле A_j су опсервабле отвореног система које се куплују, у интеракционом хамилтонијану, са опсерваблама окружења. На основи (4.23а) извести мастер једначину за Калдеира-Легетов модел.

Решење: У Задатку 2.18 дат је најопштији облик динамичког пресликавања за гаусијанске системе, у које спада и КЛ модел. Подразумевајући да је окружење заправо топлотно купатило неинтерагујућих бозона, следи (4.23а).

У Калдеира-Легетеовом моделу (у Шредингеровој слици):

$$H_{int} = -x \otimes \sum_i \kappa_i\, x_i \qquad (4.23б)$$

постоји само једна опсервабла отвореног система: $A_j = x$. У интеракционој слици $x(t) = \exp\left(i\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)t\right)x\exp\left(-i\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)t\right)$, па је отуда $\dot{A}_j = \dot{x} = p/m$, где је p импулс у интеракционој слици. Сменом овога у израз (4.23а) добија се *егзактна* мастер једначина за Калдеира-Легетов модел у интеракционој слици:

$$\frac{d\rho}{dt} = \Gamma\left[x,[x,\rho]\right] + \frac{\Theta}{\mathrm{m}}\left[x,[p,\rho]\right] + i\Xi[x,\{x,\rho\}] + i\frac{\Upsilon}{\mathrm{m}}[x,\{p,\rho\}]; \qquad (4.23в)$$

конкретни облици константи за нас нису од важности.

Прелаз на Шредингерову слику врши се по (2.12д): дода се унитарни, комутаторски члан, а дисипаторски члан укљешти између унитарног оператора прелаза слика једне у другу:

---

[57] L. Diosi, L. Ferialdi, Phys. Rev. Lett. **113**, 200403 (2014); L. Ferialdi, Phys. Rev. A **95**, 052109 (2017).

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathrm{H}, \rho] + \mathrm{U}_0 \left(\Gamma\big[x, [x, \rho]\big] + \frac{\Theta}{\mathrm{m}}\big[x, [p, \rho]\big] + i\Xi[x, \{x, \rho\}] + i\frac{\Upsilon}{\mathrm{m}}[x, \{p, \rho\}] \right) \mathrm{U}_0^{+}.$$

(4.23г)

Сада је очигледно да је мастер једначина у Шредингеровој слици истог облика, уз замену опсервабли из интеракционе у Шредингерову слику.

У изразу (4.23г) појављују се два оператора, x и p, па се поставља питање да ли је овај израз могуће превести у „први стандардни облик“ познат за Марковљеве процесе, који би у овом случају био облика:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H', \rho] + \sum_{j,k} a_{jk} \left(F_j \rho F_k^{+} - \frac{1}{2}\left\{ F_k^{+} F_j, \rho \right\} \right), \qquad (4.23д)$$

уз услов да $F_1 = x$, и $F_2 = p$, и у општем случају, измењеним („ренормира-ним“) слободним хамилтонијаном система.

Поређењем (4.23г) и (4.23д) лако се уочава да је само члан уз Γ у (4.23г) траженог облика, тј., да важи једнакост:

$$\Gamma\big[x, [x, \rho]\big] = 2\Gamma\left(\mathrm{x\rho x} - \frac{1}{2}\{\mathrm{x}^2, \rho\} \right) \equiv a_{11}\left(\mathrm{F}_1 \rho \mathrm{F}_1 - \frac{1}{2}\{\mathrm{F}_1^2, \rho\} \right). \qquad (4.23ђ)$$

Сви остали чланови се морају дорадити додавањем и одузимањем нових чланова како би се, ако је могуће, добио тражени облик (4.23д).

Члан уз $\frac{\Theta}{\mathrm{m}}$:

$$-\big[x, [p, \rho]\big] = x\rho p - \frac{1}{2}\rho p x - \frac{1}{2}\rho p x \pm \frac{1}{2} p x \rho + p\rho x - \frac{1}{2} x p \rho - \frac{1}{2} x p \rho \pm \frac{1}{2}\rho x p$$
$$= x\rho p - \frac{1}{2}\{px, \rho\} + p\rho x - \frac{1}{2}\{xp, \rho\} - \frac{1}{2}([\rho, px] - [\rho, xp])$$

$$\equiv \left(F_1 \rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2 F_1, \rho\} \right) + \left(F_2 \rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1 F_2, \rho\} \right) - \frac{1}{2}\big[\rho, [p, x]\big] = F_1 \rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2 F_1, \rho\} + F_2 \rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1 F_2, \rho\}. \qquad (4.23е)$$

Члан уз $i\Xi$:

$$[x,\{x,\rho\}] = [x^2,\rho] = [F_1^2,\rho]. \tag{4.23ж}$$

Члан уз $i\frac{\Upsilon}{\mathrm{m}}$:

$$[x,\{p,\rho\}] = xp\rho - p\rho x + x\rho p - \rho p x = x\rho p - \frac{1}{2}(px\rho + \rho p x) + \frac{1}{2}(px\rho - \rho p x) - p\rho x + \frac{1}{2}(xp\rho + \rho x p) + \frac{1}{2}(xp\rho - \rho x p) \equiv \left(F_1\rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2F_1,\rho\}\right) - \left(F_2\rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1F_2,\rho\}\right) + \frac{1}{2}[\{x,p\},\rho] = \left(F_1\rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2F_1,\rho\}\right) - \left(F_2\rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1F_2,\rho\}\right). \tag{4.23з}$$

Смењујући ове изразе у (4.23д) добија се мастер једначина:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H - i\Xi \mathrm{x}^2,\rho] + 2\Gamma\left(\mathrm{F_1\rho F_1} - \frac{1}{2}\{\mathrm{F}_1^2,\mathrm{\rho}\}\right) - \frac{\Theta}{\mathrm{m}}\left(\left(F_1\rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2F_1,\rho\}\right) + \left(F_2\rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1F_2,\rho\}\right)\right) + i\frac{\Upsilon}{\mathrm{m}}\left(\left(F_1\rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2F_1,\rho\}\right) - \left(F_2\rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1F_2,\rho\}\right)\right) = -i[H - i\Xi \mathrm{x}^2,\rho] + 2\Gamma\left(\mathrm{F_1\rho F_1} - \frac{1}{2}\{\mathrm{F}_1^2,\mathrm{\rho}\}\right) + \frac{1}{\mathrm{m}}(-\Theta + \mathrm{i}\Upsilon)\left(F_1\rho F_2 - \frac{1}{2}\{F_2F_1,\rho\}\right) - \frac{1}{\mathrm{m}}(\Theta + \mathrm{i}\Upsilon)\left(F_2\rho F_1 - \frac{1}{2}\{F_1F_2,\rho\}\right). \tag{4.23и}$$

Како нема члана типа $F_2\rho F_2 - \frac{1}{2}\{\mathrm{F}_2^2,\rho\}$, добијен је тражени облик са матрицом

$$a = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2\Gamma & \frac{-\Theta+\mathrm{i}\Upsilon}{\mathrm{m}} \\ \frac{-\Theta-\mathrm{i}\Upsilon}{\mathrm{m}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.23ј}$$

Својствене вредности ове матрице су: $\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 + (\Theta^2 + \Upsilon^2)/\mathrm{m}^2}$, од којих је друга мања од нуле за свако t. То јест, матрица a није позитивно-семидефинитна те се не може добити други Линдбладов облик, што говори да је динамика немарковљева.

НАПОМЕНА: Као у Задатку 2.18, стављањем да је корелациона функција сразмерна Дираковој делта функцији, следи Марковљев облик мастер једначине за овај модел. Конкретно, стављањем $A_i = q$ у (2.18ђ) непосредно се добија мастер једначина изучавана у Задацима 4.21 и 3.18 (упоредити са Задатком 3.32). Општи закључак је: модел хамилтонијана разматран од стране Калдеире и Легета, *егзактно*, води немарковљевој динамици са дисипацијом, израз (4.23в).

Марковљева апроксимација егзактне мастер једначине води мастер једначини (4.21а) у којој нема дисипације. То су суптилности напоменуте у Задатку 2.18. Тако постаје јасно да проблеми са КЛ мастер једначином, истакнути у Задацима 2.16 и 2.17, потичу од тога што је она негде *између* егзактне немарковљеве и приближне марковљеве мастер једначине за задати модел. За детаљнију дискусију видети[58]. Горња једначина (уз проверу функција времена, $\Gamma, \Theta, \Xi, \Upsilon$) је позната Ху-Паз-Жанг мастер једначина[59].

4.24 Доказати да је стање:

$$\langle x|\rho|x'\rangle \equiv \rho(x,x') = Nexp\left(-\frac{V\big((x+x')/2\big)}{k_B T} - \frac{mk_B T(x-x')^2}{2h^2}\right) \qquad (4.24а)$$

приближно стационарно решење КЛ мастер једначине за потенцијал $V(x)$ који се брзо мења са променом x.

Решење: Како се ради о координатној репрезентацији, потребно је КЛ мастер једначину превести у координатну репрезентацију, па онда сменити дато стање. Координатна репрезентација гласи:

$$\frac{d}{dt}\rho(x,x') = -\frac{i}{h}\langle x|[H,\rho]|x'\rangle - \frac{i\gamma}{h}\langle x|[x,\{p,\rho\}]|x'\rangle - \frac{2m\gamma k_B T}{h^2}\Big\langle x\Big|\big[x,[x,\rho]\big]\Big|x'\Big\rangle. \qquad (4.24б)$$

Први члан са десне стране: $\left\langle x\left|\left(\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\rho-\rho\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\right)\right|x'\right\rangle =$ $\left\langle x\left|\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\rho\right|x'\right\rangle - \left(\left\langle x'\left|\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\rho\right|x\right\rangle\right)^*$. Користећи једноставнији облик кернела, $\langle x|p|x'\rangle = -ih\delta(x-x')\frac{\partial}{\partial x'}$, :

$$\left\langle x\left|\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\rho\right|x'\right\rangle = \left(-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\rho(x,x'),$$

$$\left\langle x'\left|\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\rho\right|x\right\rangle = \left(-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+V(x')\right)\rho(x,x'), \qquad (4.24в)$$

па

---

[58] L. Ferialdi, Phys. Rev. A **95**, 052109 (2017).

[59] B.L. Hu, J. P. Paz, Y. Zhang, Phys Rev. D **45**, 2843 (1992).

$$-\frac{i}{h}\langle x|[H,\rho]|x'\rangle = \left(\frac{ih}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)-\frac{i}{h}(V(x)-V(x'))\right)\rho(x,x'). \quad \text{(4.24г)}$$

У другом члану се појављује:

$$\langle x|(xp\rho - p\rho x + x\rho p - \rho p x)|x'\rangle = \langle x|(xp\rho)|x'\rangle - \langle x|p\rho x|x'\rangle + \langle x|x\rho p|x'\rangle - \langle x|\rho p x|x'\rangle = \langle x|xp\rho|x'\rangle - \langle x|p\rho x|x'\rangle + (\langle x'|p\rho x|x\rangle)^* - (\langle x'|xp\rho|x\rangle)^*. \text{(4.24д)}$$

Срачунајмо први члан у (4.24д):

$$\langle x|xp\rho|x'\rangle = \int dx''\,dx'''\langle x|x|x''\rangle\langle x''|p|x'''\rangle\langle x'''|\rho|x'\rangle = -ih\int dx''\,dx'''\delta(x - x'')x''\delta(x''-x''')\frac{\partial}{\partial x''}\langle x'''|\rho|x'\rangle = -ihx\int dx'''\,\delta(x-x''')\frac{\partial}{\partial x}\langle x'''|\rho|x'\rangle = -ihx\frac{\partial\rho(x,x')}{\partial x}. \quad \text{(4.24e)}$$

Аналогно, други члан у (4.24д) гласи: $\langle x|p\rho x|x'\rangle = -ihx'\frac{\partial\rho(x,x')}{\partial x}$. Отуда трећи члан (уз замену места x и x') у (4.24д): $(\langle x'|p\rho x|x\rangle)^* = \left(-ihx\frac{\partial\rho(x',x)}{\partial x'}\right)^* = ihx\frac{\partial\rho(x,x')}{\partial x'}$. Коначно, четврти члан у (4.24д) следи из првог (опет уз замену места x и x'): $(\langle x'|xp\rho|x\rangle)^* = \left(-ihx'\frac{\partial\rho(x',x)}{\partial x'}\right)^* = ihx'\frac{\partial\rho(x,x')}{\partial x'}$.

Тако следи парцијална диференцијална једначина:

$$\frac{d}{dt}\rho(x,x') = \left(\frac{ih}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)-\frac{i}{h}(V(x)-V(x'))-\gamma(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)-\frac{2m\gamma k_BT}{h^2}(x-x')^2\right)\rho(x,x'); \quad \text{(4.24e)}$$

последњи израз са д.с. је преузет из Задатка 3.18. Стање дато у поставци задатка ће бити приближно стационарно само ако д.с. (4.24е) буде приближно једнака нули када се ово стање смени у једначину.

Прво срачунајмо трећи члан у (4.24е), коришћењем (4.24а):

$$-\gamma(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)\rho(x,x') = -\gamma(x-x')\left(-\frac{1}{2k_BT}\frac{\partial V((x+x')/2)}{\partial x}-\frac{mk_BT}{2h^2}2(x-x') - \left(-\frac{1}{2k_BT}\frac{\partial V((x+x')/2)}{\partial x'}+\frac{mk_BT}{2h^2}2(x-x')\right)\right)\rho \approx 2\gamma\frac{mk_BT}{h^2}(x-x')^2\rho, \text{(4.24ж)}$$

што се потире са последњим чланом. Уочити да је овде коришћена претпоставка о симетричности потенцијала у односу на извод по x и x'.

Прва два члана ћемо размотрити увођењем згодних смена:

$$x = r + hq, x' = r - hq, \tag{4.24з}$$

одакле лако следи $\partial/_{\partial r} = \partial/_{\partial x} + \partial/_{\partial x'}$ и $\partial/_{\partial q} = h\left(\partial/_{\partial x} - \partial/_{\partial x'}\right)$, па

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial q} = h\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right). \tag{4.24и}$$

Исто тако, непосредно, следи и:

$$V(x) - V(x') \equiv V(r + hq) - V(r - hq) \approx 2\frac{\partial V}{\partial r}hq, \tag{4.24j}$$

где је у последњем реду коришћена претпоставка о брзо опадајућем потенцијалу. Тако се за прва два члана добија:

$$i\left(\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r \partial q} - 2\frac{\partial V}{\partial r}q\right)Nexp\left(-\frac{V(r)}{k_B T} - 2mk_B Tq^2\right) = i\left(\frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial r}(-4mk_B Tq\rho) - 2\frac{\partial V}{\partial r}q\rho\right) = i\left(-2k_B Tq\left(-\frac{1}{k_B T}\frac{\partial V}{\partial r}\rho\right) - 2\frac{\partial V}{\partial r}q\rho\right) = 0. \tag{4.24к}$$

Тако, под претпоставкама приближне симетричности извода $V((x + x')/2)$ по x и x', као и брзог опадања потенцијала, израз (4.24j), добијено је да је д.с. диференцијалне једначине по $\rho(x, x')$ једнака нули. Тиме је потврђено да је дато стање приближно стационарно стање мастер једначине Калдеире и Легета.

НАПОМЕНА: Задато стање је гаусијанско, те се његово приближно одржавање могло и очекивати, с обзиром на то да је КЛ мастер једначина гаусијанског типа (Задатак 2.18). Константа нормирања, N, задата за дијагоналне чланове, износи $N = \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{V(x)}{k_B T}\right)dx$. Више детаља се може наћи у [4]. На крају, приметимо да корисност од КЛ мастер једначине потиче од тога да све гаусијанске мастер једначине разматране у 4.23 имају гаусијанска стања као стационарна стања, тако да све оне дају квалитативно исте, тј., сличне резултате. Отуда се КЛ мастер једначина широко користи, упркос њеним мањкавостима утврђеним у Задацима 2.16, 2.17 и 4.23.

4.25 Задата је мастер једначина (у интеракционој слици, уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја) за кубит:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\alpha}{2}\sum_{k=x}^{z} \gamma_k(t)\,(\sigma_k \rho \sigma_k - \rho), \qquad (4.25а)$$

уз избор: $\gamma_x = 1 = \gamma_y, \gamma_z = -\tanh(t)$, $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$. Решити једначину и проверити ПП и растављивост пресликавања.

Решење: Мапа је очигледно унитална, тј., сачувава идентични оператор, али, иако је формално Линдбладовог облика, није Марковљева, јер је $\gamma_z < 0, \forall t > 0$. Поставља се питање шта је узрок немарковљевости динамике – непотпуна позитивност, или нерастављивост мапе.

Решавање једначине (4.25а) може се, наравно, обавити и без система за матричне чланове статистичког оператора. Како је лиувилијан, $\mathcal{L}$, линеаран суперооператор, то важи:

$$\mathcal{L}[\rho] = \mathcal{L}\left[\sum_{i=x}^{z} \frac{I + \vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right] = \sum_{i=x}^{z} \frac{\mathcal{L}[I] + \vec{n}\cdot\mathcal{L}[\vec{\sigma}]}{2}, \qquad (4.25б)$$

довољно је израчунати дејство лиувилијана на алгебру кубита, што лако следи на основи (4.25б):

$$\mathcal{L}[I] = 0, \mathcal{L}[X] = \alpha(\tanh t - 1)X, \mathcal{L}[Y] = \alpha(\tanh t - 1)Y, \mathcal{L}[Z] = -2\alpha Z, \qquad (4.25в)$$

а што је еквивалентно промени Блоховог вектора:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{n}(t) = (\alpha(\tanh t - 1)n_x, \alpha(\tanh t - 1)n_y, -2\alpha n_z). \qquad (4.25г)$$

Тако из (4.25а) следи систем независних диференцијалних једначина:

$$\frac{dn_x(t)}{dt} = \alpha(\tanh t - 1)n_x(t),$$

$$\frac{dn_y(t)}{dt} = \alpha(\tanh t - 1)n_y(t),$$

$$\frac{dn_z(t)}{dt} = -2\alpha n_z(t), \qquad (4.25д)$$

чијом интеграцијом се лако добија:

$$n_x(t) = n_x(0)e^{-\alpha t}\cosh^{\alpha} t, n_y(t) = n_y(0)e^{-\alpha t}\cosh^{\alpha} t,\ n_z(t) = n_z(0)e^{-2\alpha t}, \quad (4.25ђ)$$

то јест, добија се закон кретања, тј., динамичко пресликавање:

$$\Phi_{(t,0)}[\rho(0)] = \frac{1}{2}\left(I + e^{-\alpha t}\cosh^{\alpha} t\left(n_x X + n_y Y\right) + e^{-2\alpha t}n_z Z\right). \quad (4.25е)$$

Пресликавањем у 4-димензионални простор, мапа (4.25е) репрезентована матрицом A даје:

$$A\begin{pmatrix}\frac{1+n_z}{2}\\ \frac{n_-}{2}\\ \frac{n_+}{2}\\ \frac{1-n_z}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 + n_z e^{-2\alpha t}\\ n_- e^{-\alpha t}\cosh^{\alpha} t\\ n_+ e^{-\alpha t}\cosh^{\alpha} t\\ 1 - n_z e^{-2\alpha t}\end{pmatrix}, \quad (4.25ж)$$

одакле следи матрица процеса:

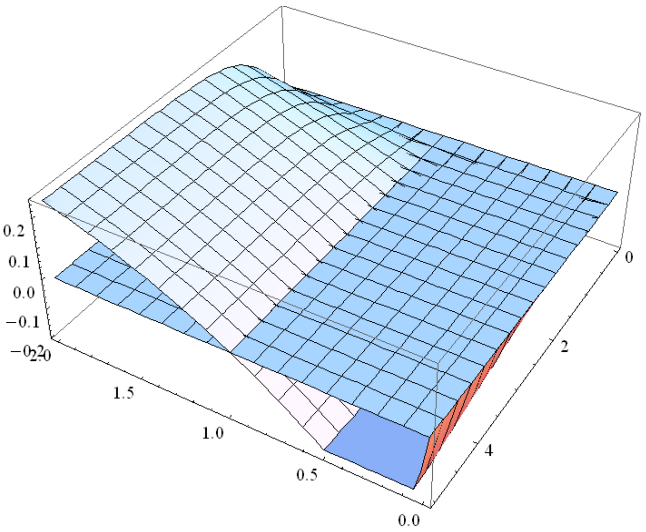
$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+e^{-2t\alpha}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t\alpha})\\ 0 & e^{-t\alpha}\cosh^{\alpha} t & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t\alpha}\cosh^{\alpha} t & 0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2t\alpha}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+e^{-2t\alpha})\end{pmatrix}.(4.25з)$$

Својствене вредности матрице, $1, e^{-2t\alpha}, e^{-t\alpha}\mathrm{Cosh}[t]^{\alpha}, e^{-t\alpha}\mathrm{Cosh}[t]^{\alpha}$, су све ненулте, те матрица има инверзну матрицу, тј., динамичко пресликавање је инвертибилно. Отуда, на основи Задатка, 2.8, следи и да је пресликавање растављиво.

Динамичка матрица:

$$B = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+e^{-2t\alpha}) & 0 & 0 & e^{-t\alpha}\cosh^{\alpha} t\\ 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t\alpha}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t\alpha}) & 0\\ e^{-t\alpha}\cosh^{\alpha} t & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+e^{-2t\alpha})\end{pmatrix} \quad (4.25и)$$

има својствене вредности: $\frac{1}{2}(1-e^{-2t\alpha}), \frac{1}{2}(1+e^{-2t\alpha}\pm 2e^{-t\alpha}\mathrm{Cosh}[t]^{\alpha})$. Слика 4.3 сведочи да је трећа својствена вредност негативна за $\alpha < 1$, тј., да је ненегативна за $\alpha \geq 1$.



Слика 4.3 Својствене вредности динамичке матрице (4.25и) где су узете вредности: $\alpha\epsilon[0,2], t\epsilon[0,5]$.

Дакле, динамичко пресликавање описано мастер једначином (4.25а) је растављиво, али није потпуно позитивно за $\alpha < 1$. Отуда и без провере пресликавања за ненулти почетни тренутак се добија одговор[60] шта је узрок непостојању Линдбладовог облика мастер једначине за процес (4.25а): узрок је неПП пресликавања.

НАПОМЕНА: За мастер једначину (4.25а) за $\alpha \neq 1$ се каже[61] да је добијена „временском деформацијом“ мастер једначине (4.25а) за коју је $\alpha = 1$. То јест, уместо тренутка t, ставља се $\alpha(t), \alpha \neq 1$, чиме се мастер једначина, локална у времену, мења:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}_t[\rho] \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \alpha(t)\mathcal{L}_t[\rho], \qquad (4.25\text{j})$$

при чему „деформација“ може бити временски зависна, тј., нека функција времена, $\alpha(t)$. Испоставља се да је ово технички корисно у смислу да се временским деформисањем динамичког пресликавања може утврдити да ли је оригинално („недеформисано“) пресликавање Марковљево, тј., ПП-растављиво. Правило је једноставно[62]: ако је деформисано пресликавање, *за сваку деформацију*, потпуно позитивно, онда је

---

[60] Алтернативни рачунски поступак се може наћи у F. Benatti et al, Phys. Rev. A **95**, 012112 (2017).

[61] S. Filippov, Dariusz Chruscinski, Phys. Rev. A 98, 022123 (2018)

оригинално пресликавање ПП-растављиво (тј., Марковљево). Ефективно, овиме се проверава растављивост недеформисаног пресликавања, ако је познато да је оно ПП. Наравно, општа претпоставка је да је динамика глатка у времену (то јест, да лиувилијан, $\mathcal{L}_t$, као (у општем случају) функција времена, нема сингуларитета – видети Задатке 3.26 и 3.27 за супротно).

4.26 Применити поступак „временског деформисања“ на мастер једначину (3.17и), и тиме доказати да је у питању Марковљева мастер једначина.

Решење: Мастер једначина (3.17и):

$$\dot{\rho} = \gamma[2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-], \lambda > 0, \qquad (4.26а)$$

тиче се различитих физичких система, тј., модела: како амплитудског распада једног квантног бита (Задатак 3.9), тако и квантно-оптичке мастер једначине за двонивоски атом на апсолутној нули (више задатака у овој збирци).

Деформисање мастер једначине (4.26а) значи (видети претходни задатак, посебно Напомену тамо дату) увођење ненегативне функције времена, $\alpha(t)$, тј., нове мастер једначине:

$$\dot{\rho} = \alpha(t)\gamma\left[\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}(\sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-)\right]. \qquad (4.26б)$$

Задатак се своди на проверу потпуне позитивности новог пресликавања задатог мастер једначином (4.26б): ако је пресликавање које одговара (4.26б) потпуно позитивно за *свако* $\alpha(t)$, онда је и оригинално, тј., пресликавање које одговара (4.26а), и ПП-растављиво, тј., Марковљево.

Користећи се решењима (3.17л) и стављањем $f(t) \equiv \int_o^t dt\, \alpha(t) > 0, \forall t$, непосредно следи решење мастер једначине (4.26б):

$$\Phi_{(t,0)}[\rho(0)] = \rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) + \rho_{11}(0)\left(1 - e^{-2\gamma f}\right) & \rho_{10}(0)e^{-\gamma f} \\ \rho_{01}(0)e^{-\gamma f} & \rho_{11}(0)e^{-2\gamma f} \end{pmatrix}. \qquad (4.26б)$$

Стандардним поступком широко коришћеним у Поглављу 3 и у Задатку изнад, лако се добија репрезентациона матрица деформисаног пресликавања $\Phi_{(t,0)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-e^{-2f\gamma} \\ 0 & e^{-f\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-f\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2f\gamma} \end{pmatrix}. \qquad (4.26в)$$

Својствене вредности матрице пресликавања, 1, $e^{-f\gamma/2}, e^{-f\gamma}$, су ненулте у сваком тренутку. Отуда следи да је динамичка мапа растављива.

Из (4.26в) следи да је динамичка матрица деформисаног пресликавања:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-f\gamma} \\ 0 & 1-e^{-2f\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-f\gamma} & 0 & 0 & e^{-2f\gamma} \end{pmatrix}, \qquad (4.26г)$$

чије су својствене вредности, $0{,}1-e^{-f\gamma}, 1+e^{-f\gamma}$, те су све својствене ненегативне. Тиме је потврђено да је деформисано пресликавање, *за сваку ненегативну функцију* $\alpha(t)$, позитивно(-семидефинитно) па, сходно, поступку, доказано је да је недеформисано пресликавање, израз (4.26а), Марковљево, тј., ПП-растављиво.

4.27 Решити квантну оптичку мастер једначину за двонивоски атом у слабом, временски промењивом, класичном електромагнетном пољу задатом у Задатку 4.1.

Решење: Слаба спољашња поља (параметар $A \ll 1$ у (4.1д)) се могу уврстити у мастер једначину простим додавањем временски независном делу сопственог хамилтонијана отвореног система [2]. У овом случају то се тиче квантно-оптичке мастер једначине за двонивоски атом која је разматрана у Задатку 3.11 (у Шредингеровој слици):

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H,\rho(t)] + \gamma_0(\bar{n}+1)\left(\sigma_-\,\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\,\sigma_+\,\sigma_-,\rho(t)\}\right) +$$
$$\gamma_0\bar{n}\left(\sigma_+\,\rho(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\,\sigma_-\,\sigma_+,\rho(t)\}\right),$$
(4.27a)

где су још [2,4]: $\gamma_0 = 4\omega^3\left|\vec{d}\right|^2/3hc^3$, $\bar{n} = \left(e^{\beta\omega}-1\right)^{-1}$, и $\vec{d}$ константа која означава вредност атомског диполног момента, Задатак 4.7 (тј., Задатак 4.3 уз поједностављење да је $\vec{d}$ реалан вектор).

Сходно Задатку 4.1, хамилтонијан (4.1д) је преведен у облик (4.1з), уз услов $\varphi = 0$:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & Ae^{i\omega t} \\ Ae^{-i\omega t} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}, \qquad (4.27б)$$

који се, занемаривањем Лембовог и Штарковог помераја, подразумева у (4.27а).

Лако је уверити се да $[H(t),H(t')] \neq 0$ те поступак непосредне интеграције захтева коришћење временског уређења облика (2.6д). Зато ћемо одабрати другачији пут.

С обзиром на (4.1ј), идеја се лако појављује: преведимо хамилтонијан унитарном трансформацијом у временски независан облик, и решимо мастер једначину (4.27а) за тај облик, а онда инверзним пресликавањем нађимо коначно решење мастер једначине (у Шредингеровој слици).

Размотримо промену разматране квантне слике у контексту формализма мастер једначина. Прво, овде се промена слике тиче само отвореног система. То значи да нема никаквих промена када је модел окружења у питању, па очекујемо Марковљеву мастер једначину за отворени систем са неизмењеним константама пригушења. Зато би требало проверити промене комутаторског дела, као и дисипатора, при преласку на нову слику.

Како је, Задатак 2.24, промена слике дефинисана унитарном трансформацијом (овде: само за отворени систем) преводи стање ρ у $\tilde{\rho} = U\rho U^{+}$. Сада временска зависност унитарног оператора даје нови облик мастер једначине:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{dU}{dt}\rho U^{+} + U\rho\frac{dU^{+}}{dt} + U\frac{d\rho}{dt}U^{+}, \qquad (4.27б)$$

при чему је $\frac{d\rho}{dt}$ задато мастер једначином у почетној слици.

Како је, у Задатку 4.1, унитарни оператор од интереса дат изразом $U = e^{iBt} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$, мастер једначина у новој слици добија облик:

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} == -i[UHU^{+} - B, \tilde{\rho}(t)] + U\mathcal{D}[\rho(t)]U^{+}, \qquad (4.27г)$$

одакле се види и начин промене дисипатора.

Сменом дисипатора из (4.27а) у (4.27г):

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -i[UHU^{+} - B, \tilde{\rho}(t)] + \gamma_0(\bar{n} + 1)\left(\tilde{\sigma}_{-}\,\tilde{\rho}(t)\tilde{\sigma}_{+} - \frac{1}{2}\{\,\tilde{\sigma}_{+}\tilde{\sigma}_{-}\,, \tilde{\rho}(t)\}\right) + \gamma_0\bar{n}\left(\tilde{\sigma}_{+}\,\tilde{\rho}(t)\tilde{\sigma}_{-} - \frac{1}{2}\{\,\tilde{\sigma}_{-}\tilde{\sigma}_{+}\,, \tilde{\rho}(t)\}\right), \qquad (4.27д)$$

где „тилда“ означава аналогну трансформацију Линдбладових оператора. Како се лако показује:

$$\tilde{\sigma}_{\pm} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix}\sigma_{\pm}\begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix} = e^{\mp i\omega t}\sigma_{\pm}, \qquad (4.27ђ)$$

мастер једначина (4.27д) добија облик (Марковљев дисипатор се опет не мења – видети Задатак 2.13):

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -i[UHU^{+} - B, \tilde{\rho}(t)] + \gamma_0(\bar{n} + 1)\left(\sigma_{-}\,\tilde{\rho}(t)\sigma_{+} - \frac{1}{2}\{\sigma_{+}\,\sigma_{-}\,, \tilde{\rho}(t)\}\right) + \gamma_0\bar{n}\left(\sigma_{+}\,\tilde{\rho}(t)\sigma_{-} - \frac{1}{2}\{\sigma_{-}\,\sigma_{+}\,, \tilde{\rho}(t)\}\right), \qquad (4.27е)$$

где се са д.с. губи свака зависност од времена, осим, наравно, траженог стања $\tilde{\rho}$. Сада је решавање (4.27е) могуће обавити матрично.

У операторском облику (подразумевајући стандардну Z-репрезентацију за горње матричне изразе, $Z|1\rangle = |1\rangle, Z|0\rangle = -|0\rangle$) израз (4.1л), уз услов резонанције, даје:

$$\widetilde{H} = UHU^{+} - B = AX, \tag{4.27ж}$$

што води диференцијалним једначинама за матричне елементе $\tilde{\rho}(t)$:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ij}}{dt} = -i\langle i|[AX, \tilde{\rho}(t)]|j\rangle + \gamma_0(\bar{n}+1)\langle i|\left(\sigma_-\,\tilde{\rho}(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\,\sigma_-\,, \tilde{\rho}(t)\}\right)|j\rangle +$$
$$\gamma_0\bar{n}\langle i|\left(\sigma_+\,\tilde{\rho}(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\,\sigma_+\,, \tilde{\rho}(t)\}\right)|j\rangle, \quad i, j = 0,1. \tag{4.27з}$$

Из (4.27з) следи систем диференцијалних једначина:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{11}}{dt} = -iA(\tilde{\rho}_{01} - \tilde{\rho}_{10}) - \gamma_0(2\bar{n}+1)\tilde{\rho}_{11} + \gamma_0\bar{n},$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_{10}}{dt} = -i\mathrm{A}(1 - 2\tilde{\rho}_{11}) - \frac{\gamma_0}{2}(2\bar{n}+1)\tilde{\rho}_{10}. \tag{4.27и}$$

Стављајући $\tilde{\rho}_{10} = \alpha + i\beta = \tilde{\rho}_{01}^{*}$ у (4.27и) и изједначавањем реалних чланова (имагинарних чланова) са леве са реалним члановима (имагинарним члановима) са десне стране, добија се следећи систем диференцијалних једначина:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{11}}{dt} = -2P\tilde{\rho}_{11} - 2A\beta + 2B,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2P\alpha,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 2A\tilde{\rho}_{11} - 2P\beta - A, \tag{4.27j}$$

где: $P = \frac{\gamma_0}{2}(2\bar{n}+1)$, $B = \frac{1}{2}\gamma_0\bar{n}$.

Матрица хомогеног система:

$$\begin{pmatrix} -2P & 0 & -2A \\ 0 & -2P & 0 \\ 2A & 0 & -2P \end{pmatrix}, \tag{4.27л}$$

и нехомогени члан:

$$K = \begin{pmatrix} 2B \\ 0 \\ -A \end{pmatrix}. \tag{4.27љ}$$

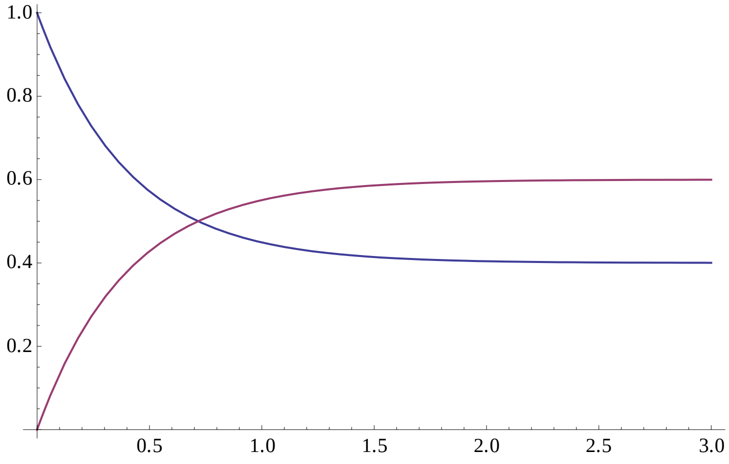
Решење нехомогене једначине гласи:

$$X(t) = e^{Mt}X(0) + e^{Mt}\int_0^t ds\, e^{-Ms}K(s), \tag{4.27м}$$

$X^T = (\tilde{\rho}_{11}, \alpha, \beta)$, одакле се повратком у Шредингерову слику добија: $\rho_{11}(t) = \tilde{\rho}_{11}(t) = 1 - \rho_{00}(t)$ и $\rho_{10}(t) = e^{i\omega t}\tilde{\rho}_{10}(t) = \left(\rho_{01}(t)\right)^*$.

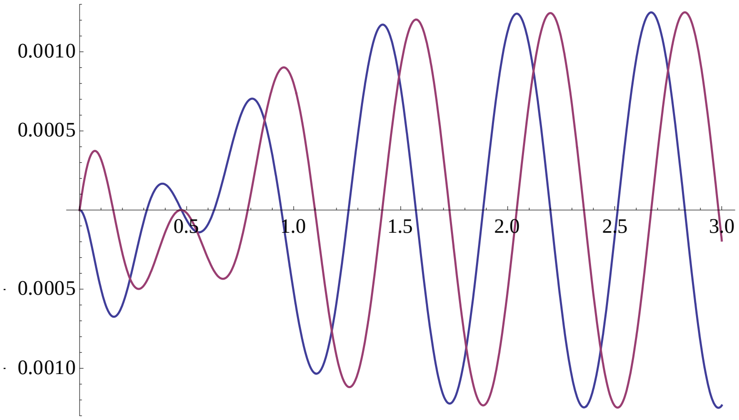
Аналитички облици решења система (4.27ј) су обимни и не нарочито физички информативни, осим за реални члан $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-2Pt}$. Зато, ради поређења са Задатком 4.1, изаберимо параметре, све у Шредингеровој слици, нпр.: $A = 0.01, P = 2, B = 1/2, \gamma = 1, \alpha(0) = 0 = \beta(0), \tilde{\rho}_{11}(0) = 1, \omega = 10$.

Графички приказ за дијагоналне елементе истиче смањење и сатурацију попуњености побуђеног, тј., увећање и сатурацију основног нивоа:



Слика 4.4 Приказ дијагоналних чланова, $\rho_{11}(t)$ и $\rho_{00}(t)$.

Временска зависност реалног и имагинарног члана за $\rho_{10}(t)$ је дата на Слици 4.5 (плаво за реални, а црвено за имагинарни члан).



Слика 4.5 Приказ реалног (плаво) и имагинарног (црвено) дела $\rho_{10}(t)$.

Квалитативно, овакво понашање је очекивано (и не мења се преласком на Шредингерову слику): попуњеност горњег нивоа није нула ни после дугог временског интервала, и то захваљујући присуству ласерског поља.

4.28 Задато је динамичко пресликавање за један кубит:

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{U}_t \Phi_t, \tag{4.28a}$$

где је унитарно пресликавање задато са $\mathcal{U}_t[\rho] \overset{\text{def}}{=} e^{-iYt}\rho e^{iYt}$, док $\Phi_t[\rho] = (1-p)\rho + p(\rho_{00}|0\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1|)$, где временски независна вероватноћа $0 \leq p \leq 1$. Доказати да је ова динамика неглатка ако за сваки тренутак $t > t_*$, где је t_* коначан тренутак, $p(t > t_*) = 1$.

Решење: Доказ ће бити дат доказом неинвертибилности динамичке мапе (4.28а) за $t > t_*$. То јест, биће доказано да је мапа инвертибилна само до тенутка t_* за који је вероватноћа $p < 1$. Неинвертибилност мапе, почев од тренутка t_*, чини мапу не-глатком, а тренутак t_* тренутком сингуларитета мапе.

$$\mathcal{G}_t[\rho] = \mathcal{U}_t \Phi_t[\rho] \overset{\text{def}}{=} e^{-iYt}\big((1-p)\rho + p(\rho_{00}|0\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1|)\big)e^{iYt}. \quad \text{(4.28б)}$$

Узмимо стандардну Z-репрезентацију, у којој за матрично представљено почетно стање:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+n_z) & \frac{n_-}{2} \\ \frac{n_+}{2} & \frac{1}{2}(1-n_z) \end{pmatrix}, \qquad \text{(4.28в)}$$

помоћу (4.28б) даје за коначно стање:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2+(-1+p)\mathrm{Sin}[2t](n_- + n_+) + 2\mathrm{Cos}[2t]n_z) & \frac{1}{2}(-(-1+p)\mathrm{Cos}[t]^2 n_- + (-1+p)\mathrm{Sin}[t]^2 n_+ + \mathrm{Sin}[2t]n_z) \\ \frac{1}{2}((-1+p)(\mathrm{Sin}[t]^2 n_- - \mathrm{Cos}[t]^2 n_+) + \mathrm{Sin}[2t]n_z) & \frac{1}{4}(2-(-1+p)\mathrm{Sin}[2t](n_- + n_+) - 2\mathrm{Cos}[2t]n_z) \end{pmatrix}.$$

(4.28г)

Отуда лако следи матрица процеса која задовољава једнакост $\rho_1 = \mathrm{A}\rho$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2t] & \frac{1}{2}(-1+p)\mathrm{Sin}[2t] & \frac{1}{2}(-1+p)\mathrm{Sin}[2t] & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2t] \\ \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2t] & (1-p)\mathrm{Cos}[t]^2 & (-1+p)\mathrm{Sin}[t]^2 & -\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2t] \\ \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2t] & (-1+p)\mathrm{Sin}[t]^2 & (1-p)\mathrm{Cos}[t]^2 & -\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2t] \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2t] & \frac{1}{2}(1-p)\mathrm{Sin}[2t] & \frac{1}{2}(1-p)\mathrm{Sin}[2t] & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2t] \end{pmatrix}. \quad \text{(4.28д)}$$

Својствене вредности ове матрице гласе: $1{,}1-p, \frac{1}{2}((2-p)\mathrm{Cos}[2t] \mp \sqrt{4(\mathrm{p}-1)+(\mathrm{p}-2)^2\mathrm{Cos}[2t]^2})$.

За свако $p < 1$ мапа има ненулте својствене вредности те је инвертибилна, за сваки тренутак t. За $p = 1$ само прва својствена вредност није једнака нули ни за један тренутак t, те је отуда и мапа неинвертибилна.

4.29 За динамичко пресликавање дато изразом (4.28а), почев од тренутка означеног са t_*: (а) показати да се језгро мапе временом проширује, и (б) наћи ранг пресликавања.

Решење: С обзиром да унитарни оператор има тривијално језгро и цео простор као ранг, требало би само проучити пресликавање Φ_t. Ово пресликавање даје коначно стање за произвољно почетно стање једног кубита (двонивоског система):

$$\Phi_t\left[\frac{1}{2}(I + n_i X_i)\right] = \frac{1}{2}\Big(I + n_z Z + (1-p)\big(n_x X + n_y Y\big)\Big). \qquad (4.29а)$$

(а) Отуда за $p < 1$ ниједан базисни елемент из алгебре оператора, $\{I, X_i, 1 = 1,2,3\}$ није у језгру пресликавања Φ_t:

$$\Phi_t[I] = I, \Phi_t[X] = (1-p)X, \Phi_t[Y] = (1-p)Y, \Phi_t[Z] = Z. \qquad (4.29б)$$

Међутим, из (4.29б), за $p = 1$, следи:

$$\Phi_t[X] = (1-p)X = 0, \Phi_t[Y] = (1-p)Y = 0,$$

то јест, Паулијеви оператори X и Y су у језгру пресликавања за сваки тренутак $t > t_*$. Тако се језгро укупне динамичке мапе (4.28а) проширује после тренутка t_*.

(б) Из (4.29а) следи да, за $p < 1$, ранг пресликавања чине оператори који имају „компоненте“ по свим базисним елементима алгебре $A \in \{I, X_i, i = 1,2,3\}$, то јест, $tr\big(A_j \Phi_t[A_i]\big) \neq 0$ за бар неко A_j за задато A_i; $A_i, A_j \in \{I, X_i, 1 = 1,2,3\}$. Међутим, као што је очигледно, за $p = 1$, сви ликови пресликавања Φ_t су линеарне комбинације само оператора из скупа $A \in \{I, Z\}$. То јест, ранг мапе се сужава после тренутка t_*.

НАПОМЕНА: Овај и претходни задатак су још један (в. и Задатак 3.27) пример не-глатког динамичког пресликавања; *коначни* тренутак t_* је сингуларитет динамике. Сходно Задатку 2.9, овакво пресликавање нема мастер једначину (диференцијални облик) за временске интервале који обухватају тренутак t_*, али имају за временске интервале који су краћи од t_*. Овиме се заправо отвара могућност изучавања динамичких пресликавања која нису инвертибилна (за неки временски интервал); за више детаља видети D.

Chruściński, Á. Rivas and S. Chakraborty, „Information Flow Versus Divisibility for Non-invertible Dynamical Maps“, in *Advances in Open Systems and Fundamental Tests of Quantum Mechanics,* Proceedings of the 684. WE-Heraeus-Seminar, Bad Honnef, Germany, 2–5 December 2018, pp.15-28.

4.30 На пару кубита два пута је примењена, тзв., CNOT трансформација. Показати да друга примена ове трансформације не води добро дефинисаној динамичкој мапи на појединачним кубитима. CNOT квантно-информатичка капија је дефинисана на следећи начин: $|0\rangle_1|i\rangle_2 \to |0\rangle_1|i\rangle_2$, и $|1\rangle_1|i\rangle_2 \to |1\rangle_1|\perp i\rangle_2, i = 0{,}1$, где „$\perp i$“ стоји за негацију i (то јест, $|\perp 0\rangle = |1\rangle$).

Решење: CNOT операција је и унитарна, и ермитска, па је њена двострука примена идентични оператор, тј., враћа се почетно стање. Размотримо сплитање које обезбеђује ова операција, ако је први кубит „контролни“, као изнад:

$$\left(\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1\right)\begin{cases}|0\rangle_2\\|1\rangle_2\end{cases} \to \begin{cases}\left(\alpha|0\rangle_1|0\rangle_2 + \beta|1\rangle_1|1\rangle_1\right)\\\left(\alpha|0\rangle_1|1\rangle_2 + \beta|1\rangle_1|0\rangle_2\right)\end{cases} \to \left(\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1\right)\begin{cases}|0\rangle_2\\|1\rangle_2\end{cases}.$$

(4.30а)

Дакле, за пар кубита, трансформација је добро дефинисана и тривијална после две примене. Размотримо сада, нпр., први кубит. После прве примене капије, стање првог кубита је мешано:

$$\rho_1 = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|. \qquad (4.30б)$$

Сада друга примена трансформације на нивоу првог кубита (д.с. (4.30а)) представља „прочишћење стања“:

$$|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| \to \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1. \qquad (4.30в)$$

Само по себи, то није проблематично – видети, нпр., Задатке 2.23 и 3.44. Оно што јесте проблематично почиње случајем: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta e^{i\delta}$. Тада исто почетно стање, лева страна (4.30в), мора да да различита коначна стања – за свако δ - у зависности од почетног стања првог кубита. Зависност динамичког пресликавања од почетног стања је особина нелинеарних пресликавања.

Размотримо матричну репрезентацију другог пресликавања за $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta$, у маниру Поглавља 3:

$$A\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \tag{4.30г}$$

што не води једнозначној матрици A; на пример, $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, као и $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, задовољава (4.30г). Размотримо, примера ради, прву матрицу.

Својствене вредности ове матрице су, 1, 0, тј., пресликавање није инвертибилно, што значи да пресликавање, нити је растављиво, ни диференцијабилно – не даје временски локалну мастер једначину.

Динамичка матрица је у овом случају:

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

са ненегативним својственим вредностима, 0,1, што формално одговара потпуно позитивном пресликавању. Међутим, ово не значи да је само пресликавање позитивно – зато што је пресликавање нестандардно.

Да бисмо се у ово уверили, размотримо пресликавање општег стања кубита:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+n_z\\ n_-\\ n_+\\ 1-n_z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+n_z\\ 1+n_z\\ 1-n_z\\ 1-n_z\end{pmatrix}.$$

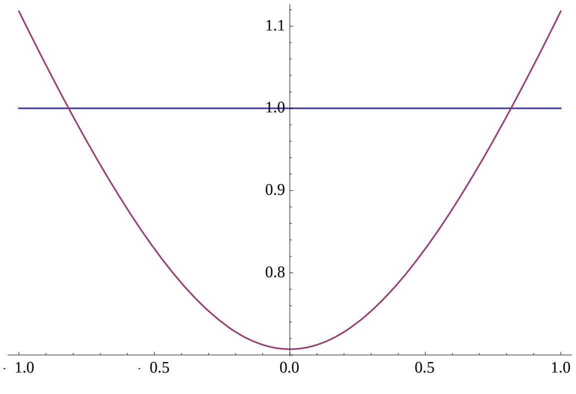
Враћено у стандардну репрезентацију:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+n_z\\ 1+n_z\\ 1-n_z\\ 1-n_z\end{pmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+n_z & 1+n_z\\ 1-n_z & 1-n_z\end{pmatrix}, \qquad (4.30д)$$

што је матрица јединичног трага. Али, и то је поента, ова матрица није у Блоховој лопти – што је Банахов простор стања за један кубит (са Блоховом сфером као чистим стањима). То се лако види рачунањем дужине „Блоховог“ вектора, који за матрицу (4.30д) гласи:

$$n \equiv \sqrt{n_z^2 + (1+n_z)^2 + (1-n_z)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(2+3n_z^2)}, \qquad (4.30ђ)$$

а што је за $n_z = \pm 1$ веће од 1 – то јест, изван Блохове сфере. Потпуности ради, на следећој слици дајемо график који речено потврђује (па и проширује – уочавање важи већ за $|n_z| > 0.816$ као што илуструје пресек графика са водоравном осом за $n = 1$):



Слика 4.6 Параметар n у функцији n_z, израз (4.30ђ).

Дакле, у општем случају, овде разматрано једнокубитно пресликавање даје лик који није статистички оператор, тј., могуће стање једног кубита. Тиме је потврђен став задатка.

НАПОМЕНА: Овиме постаје јасно да су чак и не-позитивна пресликавања физички релевантна – CNOT операција је једна од основних операција (квантних логичких капија) модела-кола квантног рачунања.

4.31 Динамика једног једнодимензионалног система степена слободе x и импулса p описана је мастер једначином:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{h}[H,\rho] - \frac{\eta}{2}\big[x,[x,\rho]\big] - \frac{\gamma^2}{8\eta h^2}\big[p,[p,\rho]\big] - \frac{i\gamma}{2h}[x,\{p,\rho\}], \text{(4.31а)}$$

где H представља енергију система, а реалне константе γ, η су ненегативне; средња заграда означава комутатор, а велика антикомутатор. Доказати да у овом моделу средња енергија система разматраног као „слободна честица“ има коначну вредност ус ваком тренутку; наћи асимптотску вредност. Упоређивањем са проширеним Калдеира-Легетовим моделом, израз (2.16ј), и декохеренцијским лимитом Калдеира-Легетове мастер једначине, Задатак 3.18, утврдити порекло коначности средње енергије система за модел (4.31а).

Решење: Временска промена очекиване вредности енергије, $\frac{d\langle H\rangle}{dt} = tr\left(H\frac{d\rho}{dt}\right)$, води једначини:

$$\frac{d\langle H\rangle}{dt} = -\frac{i}{h}tr(H[H,\rho]) - \frac{\eta}{2}tr\big(H\big[x,[x,\rho]\big]\big) - \frac{\gamma^2}{8\eta h^2}tr\big(H\big[p,[p,\rho]\big]\big) - \frac{i\gamma}{2h}tr(H[x,\{p,\rho\}]). \qquad \text{(4.31б)}$$

На основи већ коришћене једнакости, $tr(A[B,C]) = tr([A,B]C)$ следи: $tr(H[H,\rho]) = 0$, $tr\big(H\big[x,[x,\rho]\big]\big) = tr\big(\big[x,[x,H]\big]\rho\big) \equiv \langle\big[x,[x,H]\big]\rangle$, $tr\big(H\big[p,[p,\rho]\big]\big) = \langle\big[p,[p,H]\big]\rangle$, $tr(H[x,\{p,\rho\}]) = tr([H,x]\{p,\rho\})$. За модел слободне честице ван поља $H = p^2/2m$, па добијене једнакости гласе:

$$tr\big(H\big[x,[x,\rho]\big]\big) = -\frac{h^2}{m}, tr\big(H\big[p,[p,\rho]\big]\big) = 0, tr(H[x,\{p,\rho\}]) = -\frac{ih}{m}\langle p^2\rangle. \text{(4.31в)}$$

Сменом (4.31в) у (4.31б) лако следи диференцијална једначина:

$$\frac{d\langle H\rangle}{dt} = \frac{\eta h^2}{2m} - \frac{\gamma}{2m}\langle p^2\rangle = \frac{\eta h^2}{2m} - \gamma\langle H\rangle,$$

чије решење лако следи и гласи:

$$\langle H(t)\rangle = \langle H(0)\rangle e^{-\gamma t} + \frac{\eta h^2}{2m\gamma}(1 - e^{-\gamma t}). \qquad (4.31г)$$

Очигледна је коначност средње енергије у сваком тренутку, као и да асимптотска вредност износи $\frac{\eta h^2}{2m\gamma}$.

Једначина (4.31а) је изоморфна проширеној Калдеира-Легетовој мастер једначини, израз (2.16ј). Отуда обе једначине имају исти „декохеренцијски“ лимес изучен у Задатку 3.18, у којем је утврђена дивергенција $\langle H(t)\rangle$. Како за модел слободне честице трећи члан са д.с. (4.31а) нема утицаја на резултат (4.31г), а, са друге стране, у декохеренцијском лимесу се ппојављује други члан са д.с. (4.31), следи закључак да је за коначност средње енергије у времену одговоран четврти, тзв., „дисипативни“ члан. Физички: неумереную упијање енергије окружења од стране система које уводи други члан са д.с. (4.31а) уравнотежено је неумереним одливом енергије система у окружење које уводи дисипативни члан тако да, укупно, успоставља се равнотежа и коначна средња енергија система у сваком тренутку.

НАПОМЕНА: Модел Калдеире и Легета један је од истакнутих покушаја квантномеханичког моделовања феноменолошког процеса трења („дисипације“)[62]. Општа, формална (феноменолошка) анализа која обухвата овај модел, модел (4.31а), као и претходне покушаје (углавном у оквирима нуклеарне физике), може се наћи у A. Sandulescu, H. Scutaru, Ann. Phys. **173**, 277 (1987). Мастер једначина (4.31а) се користи и као модел, тзв., дисипативног CSL[63] модела објективног колапса квантног стања.

---

[62] Сва је прилика да је изворна мотивација Ервина Шредингера да уведе временски зависну једначину имала овај мотив у позадини.

[63] Енг.: “Dissipative continuous spontaneous localization”, нпр., у A. Vinante et al, arXiv: 2008.06245v1 [quant-ph].

4.32 За двокубитни систем у почетном стању $|\varphi\rangle_1\langle\varphi| \otimes \rho_2$, где је $|\varphi\rangle = \sqrt{\alpha}|0\rangle + \sqrt{1-\alpha}|1\rangle$, за произвољно стање ρ_2, задато је пресликавање:

$$\Phi\big[|\varphi\rangle_1\langle\varphi| \otimes \rho_2\big] = \big(\alpha|0\rangle_1\langle 0| + (1-\alpha)|1\rangle_1\langle 1|\big) \otimes \rho_{2th} +$$
$$\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\big(|0\rangle_1\langle 1| + |1\rangle_1\langle 0|\big) \otimes \rho_{2th}\rho_2\rho_{2th}, \qquad (4.32a)$$

где се појављује Гибсово канонско стање, $\rho_{2th} = \big(|0\rangle_2\langle 0| + e^{-\beta\Delta}|1\rangle_2\langle 1|\big)/Z,\ Z = 1 + e^{-\beta\Delta}$. Испитати особине овог пресликавања.

Решење: Избором репрезентације стања кубита у којем је z-Паулијев оператор дат матрицом $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\Delta = 1$, добија се једначина за матрицу процеса:

$$\mathrm{A}\left(\begin{matrix}
-\frac{1}{2}\alpha(-1+n_z) \\
\frac{\alpha n_+}{2} \\
-\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(-1+n_z) \\
\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_+ \\
\frac{\alpha n_-}{2} \\
\frac{1}{2}\alpha(1+n_z) \\
\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_- \\
\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(1+n_z) \\
-\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(-1+n_z) \\
\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_+ \\
\frac{1}{2}(-1+\alpha)(-1+n_z) \\
-\frac{1}{2}(-1+\alpha)n_+ \\
\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_- \\
\frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(1+n_z) \\
-\frac{1}{2}(-1+\alpha)n_- \\
-\frac{1}{2}(-1+\alpha)(1+n_z)
\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}
\frac{\alpha}{Z} \\
0 \\
-\frac{\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(-1+n_z)}{2Z^2} \\
\frac{e^{-\beta}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_+}{2Z^2} \\
0 \\
\frac{e^{-\beta}\alpha}{Z} \\
\frac{e^{-\beta}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_-}{2Z^2} \\
\frac{e^{-2\beta}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(1+n_z)}{2Z^2} \\
-\frac{\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(-1+n_z)}{2Z^2} \\
\frac{e^{-\beta}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_+}{2Z^2} \\
\frac{1-\alpha}{Z} \\
0 \\
\frac{e^{-\beta}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}n_-}{2Z^2} \\
\frac{e^{-2\beta}\sqrt{(1-\alpha)\alpha}(1+n_z)}{2Z^2} \\
0 \\
-\frac{e^{-\beta}(-1+\alpha)}{Z}
\end{matrix}\right)$$

Одатле следи матрица процеса:

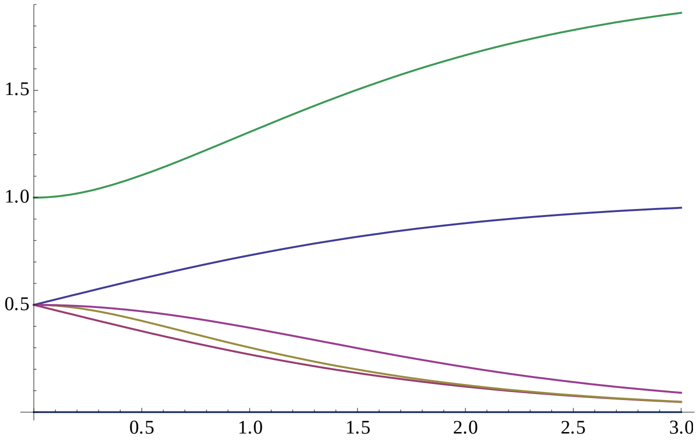
$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{e^{-\beta}}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-2\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-2\beta}}{Z^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z}
\end{pmatrix} \tag{4.32б}$$

чије су својствене вредности: $1, 0, \frac{1}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{1}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{e^{-2\beta}}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{e^{-2\beta}}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{e^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{e^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{e^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2}, \frac{e^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2}$. С обзиром да се појављује нула као (дегенерисана) својствена вредност, пресликавање није инвертибилно, па отуда ни растављиво. То имплицира непостојање мастер једначине за процес.

Поступком описаним у Задатку 2.31 следи динамичка матрица за процес:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} \\
0 & \frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-2\beta}}{Z^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z} & 0 \\
\frac{e^{-\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-2\beta}}{Z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\beta}}{Z}
\end{array}\right). \tag{4.32в}$$

Својствене вредности динамичке матрице (4.32в) су аналитички превелике па овде дајемо само графички приказ Сликом 38.



Слика 4.7 Графички приказ својствених вредности динамичке матрице за $\Delta = 1$ и $\beta \in [0,3]$.

Са слике 4.7 се види да су све својствене вредности ненегативне, што повлачи потпуну позитивност пресликавања. Како пресликавање није растављиво, процес није Марковљев.

4.33 Пар интерагујућих кубита дефинисан је хамилтонијаном:

$$H = \frac{\epsilon_1}{2} Z_1 \otimes I_2 + \frac{\epsilon_2}{2} I_1 \otimes Z_2 + J(\sigma_{1-} \otimes \sigma_{2+} + \sigma_{1+} \otimes \sigma_{2-}) \quad \text{(4.33а)}$$

и налази се у независним интеракцијама са међусобно независним топлотним купатилима која се састоје од неинтерагујућих бозонских модова у облику:

$$H_{int} = \alpha \left(\frac{I_1 + Z_1}{4} \otimes I_2 \right) \otimes B_{E1} \otimes I_{E2} + \alpha \left(I_1 \otimes \frac{I_2 + Z_2}{4} \right) \otimes I_{E1} \otimes B_{E2}. \quad \text{(4.33б)}$$

Под претпоставком слабе интеракције кубита са њиховим окружењима, што у лимесу $\alpha \to 0$ води „секуларној апроксимацији“, извести Марковљеву једначину за пар кубита као отворени систем.

Решење: Стандардни поступак под претпоставком слабе интеракције, уз „секуларну апроксимацију“ (засновану на лимесу $\alpha \to 0$), води првом Линдбладовом облику мастер једначине за отворени систем [2], што је овде пар кубита, 1+2, у Шредингеровој слици (уз занемаривање Лембовог и Штарковог помераја, и уз договор: h=0):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\mathrm{i}[H, \rho] + \sum_{\alpha,\beta,\omega} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left(A_\beta(\omega) \rho A_\alpha^+(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ A_\alpha^+(\omega) A_\beta(\omega), \rho \right\} \right), \quad \text{(4.33в)}$$

где су „Борове“ фреквенције ω добијене разликом својствених вредности сопственог хамилтонијана система H, и позитивно (семи)дефинитном матрицом $\left(\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\right)$. Тако се задатак своди на одређивање оператора $A_\alpha(\omega)$, полазећи од дефиниције дате изразом (2.27а):

$$A_i(\omega) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\omega=E_n-E_{n'}} P_{n'}\, a_i P_n,$$

где су P_n својствени пројектори сопственог хамилтонијана (4.33а), а збир се обавља по свим комбинацијама разлика својствених вредности E_n хамилтонијана које дају исти резултат $\omega \equiv \omega_{nn'} = E_n - E_{n'}$, док се оператори A_i појављују у општем изразу за интеракциони хамилтонијан, $H_{int} = \alpha \sum_i a_i \otimes B_i$. Поређењем са (4.33б), добијају се два оператора:

$$a_1 \equiv \frac{I_1+Z_1}{4} \otimes I_2 \text{ и } a_2 \equiv I_1 \otimes \frac{I_2+Z_2}{4},$$

за оба кубита.

Својствене вредности хамилтонијана H и њима придружени (ненормирани) својствени вектори (у стандардној Z-репрезентацији) гласе:

$$\mathrm{E}_1 = -\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2),\ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2),\ \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{-\epsilon_1+\epsilon_2+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}{2J} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2},\ \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{-\epsilon_1+\epsilon_2-\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}{2J} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дефинишући пројекторе на својствене правце (у Дираковим ознакама, безрепрезентационо), $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$, ненулти $A_i(\omega)$ оператори су:

$$A_1 \equiv A_{1,E_3-E_4} \equiv \mathrm{A}_1(\omega = E_3 - E_4) = \mathrm{A}_1^{+}(-\omega) =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J^2}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & -\frac{J\left(\epsilon_1+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}-\epsilon_2\right)}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0 \\ 0 & \frac{J\left(-\epsilon_1+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}+\epsilon_2\right)}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & -\frac{J^2}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 \equiv A_{2,E_3-E_4} \equiv \mathrm{A}_2(\omega = E_3 - E_4) = \mathrm{A}_2^{+}(-\omega) = -A_{1,E_3-E_4},$$

$$\mathrm{A}_3 \equiv A_{1,0} \equiv \mathrm{A}_1(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & \frac{J(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0 \\ 0 & \frac{J(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & \frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}_4 \equiv A_{2,0} \equiv \mathrm{A}_2(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & \frac{J(-\epsilon_1+\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0 \\ 0 & \frac{J(-\epsilon_1+\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & \frac{1}{2} - \frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Индекси 1 и 2 уз горње операторе означавају први, то јест, други кубит.

Лако се добијају операторски облици горњих матрица које репрезентују операторе $A_i(\omega)$:

$$\mathrm{A}_1(\omega) = -\mathrm{A}_2(\omega) = \frac{J^2}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)}(-\mathrm{I}_1 \otimes Z_2 + Z_1 \otimes I_2) + \frac{J(-\epsilon_1+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}+\epsilon_2)}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)}\sigma_- \otimes \sigma_+ - \frac{J(\epsilon_1+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}-\epsilon_2)}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)}\sigma_+ \otimes \sigma_- = A_1^{+}(-\omega) = -A_2^{+}(-\omega),$$

$$A_2(0) = \frac{1}{4}\mathrm{I}_1 \otimes I_2 + \frac{J^2}{8J^2+2(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}\mathrm{I}_1 \otimes Z_2 + (\frac{1}{4} - \frac{J^2}{8J^2+2(\epsilon_1-\epsilon_2)^2})\mathrm{Z}_1 \otimes I_2 + \frac{J(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)}(\sigma_- \otimes \sigma_+ + \sigma_+ \otimes \sigma_-),$$

$$A_3(0) = \frac{1}{4}\mathrm{I}_1 \otimes I_2 + (\frac{1}{4} - \frac{J^2}{8J^2+2(\epsilon_1-\epsilon_2)^2})\mathrm{I}_1 \otimes Z_2 + \frac{J^2}{8J^2+2(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}\mathrm{Z}_1 \otimes I_2 - \frac{J(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)}(\sigma_- \otimes \sigma_+ + \sigma_+ \otimes \sigma_-),$$

одакле се види да, по очекивању, $A_i(0)$ су ермитски оператори.

Користећи израз за факторе пригушења [2,4]: $\gamma_{ij}(\omega) = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{i\omega s} tr\left(B_{Ei}(\omega) B_{Ej} \rho_E\right)$, као што знамо из Задатка 2.26, мешовити чланови који се тичу оба, независна окружења, биће једнаки нули. Имајући ово у виду као и једнозначне везе између фреквенција и оператора, преостају ненулти само фактори пригушења $\gamma_{ii}(\omega) \equiv \gamma_i(\omega), i = 1{,}2.$ На основи овога, уписујући ненулте операторе у дисипаторски део израза (4.33в) добија се ($\omega = E_3 - E_4$):

$$\mathcal{D}[\rho] = \gamma_1(\omega)\left(A_1 \rho A_1^+ - \frac{1}{2}\{A_1^+ A_1, \rho\}\right) + \gamma_1(-\omega)\left(A_1^+ \rho A_1 - \frac{1}{2}\{A_1 A_1^+, \rho\}\right) +$$
$$\gamma_2(\omega)\left(A_2 \rho A_2^+ - \frac{1}{2}\{A_2^+ A_2, \rho\}\right) + \gamma_2(-\omega)\left(A_2^+ \rho A_2 - \frac{1}{2}\{A_2 A_2^+, \rho\}\right) +$$
$$\gamma_1(0)\left(A_3 \rho A_3 - \frac{1}{2}\{A_3^2, \rho\}\right) + \gamma_2(0)\left(A_4 \rho A_4 - \frac{1}{2}\{A_4^2, \rho\}\right). \qquad (4.33г)$$

Како је горе добијено да је $A_1 = -A_2$, и како се може претпоставити исти модел интеракције кубита (исти облик оператора B_{Ei}) са два окружења, што води једнакости $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$, очигледно следи поједностављење дисипатора (4.33г):

$$\mathcal{D}[\rho] = 2\gamma(\omega)\left(A_1 \rho A_1^+ - \frac{1}{2}\{A_1^+ A_1, \rho\}\right) + 2\gamma(-\omega)\left(A_1^+ \rho A_1 - \frac{1}{2}\{A_1 A_1^+, \rho\}\right) +$$
$$\gamma(0)\left(A_3 \rho A_3 - \frac{1}{2}\{A_3^2, \rho\} + A_4 \rho A_4 - \frac{1}{2}\{A_4^2, \rho\}\right). \qquad (4.33д)$$

4.34 За модел два кубита уведен у претходном задатку записати, тзв., „локалну“ мастер једначину првог Линдбладовог облика, чији су оператори $A_\alpha(\omega)$ дефинисани у односу на сопствене хамилтонијане појединачних кубита. Решавањем мастер једначине наћи стационарна стања за процес, временску промену енергије укупног система и асимптотска стања за почетна стања, означена са $\sigma_1(0) \otimes \sigma_2(0)$, која су дефинисана Блоховим векторима $\vec{m}$ и $\vec{n}$, редом: (а) $\vec{m}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\vec{n}=\{0,0,-1\}$, и (б) $\vec{m}=\{0,0,-1\},\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Решење: „Локалне“ мастер једначине Марковљевог типа не следе из микроскопских разматрања. Из микроскопских разматрања, тј., уобичајеног поступка, следе „глобалне“ мастер једначине типа (4.33г,д). Ипак, у неким случајевима, феноменолошки уведене, локалне мастер једначине се могу испоставити практично корисним[64]. Локалне мастер једначине (ЛМЈ) се феноменолошки записују преко оператора $A_\alpha(\omega)$ датих изразом (2.27а),

$$A_\alpha(\omega)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\omega=E_n-E_{n'}}P_{n'}\,a_\alpha P_n,$$

где се и својствене енергије, и својствени пројектори тичу сопствених хамилтонијана појединачних кубита.

Како су сопствени хамилтонијани за два кубита истог облика, извођење које следи се тиче оба кубита.

Сопствени хамилтонијан од интереса, $\varepsilon Z/2$, има спектралну форму:

$$\frac{\varepsilon}{2}|1\rangle\langle 1|-\frac{\varepsilon}{2}|0\rangle\langle 0|\equiv\frac{\varepsilon}{2}P_1-\frac{\varepsilon}{2}P_2,$$

па се појављује једнозначна веза фреквенција и оператора:

$$\varepsilon\leftrightarrow P_2a_iP_1,-\varepsilon\leftrightarrow P_1a_iP_2,0\leftrightarrow P_1a_iP_1+P_2a_iP_2, \qquad (4.34а)$$

где су оператори $a_i,i=1,2$ уведени у претодном задатку, и из којих следи да, за оба кубита, $a_1=\frac{I+Z}{4},a_2=I$. Ортогоналност пројектора тако своди задатак на анализу само оператора a_1, за оба кубита, јер се добијају нулти оператор, као и идентични оператор, у (4.34а) за $i=2$.

Сада, како $[a_1,P_i]=0,i=1,2$, израз (4.34а) се своди само на везу:

$$0\leftrightarrow\frac{I+Z}{4},$$

---

[64] Видети, на пример, M. Am-Shallem et al, New J. Phys. **17** (2015) 113036, као и Scali et al, arXiv:2009.11324v1 [quant-ph].

за оба кубита. То јест, за оба кубита постоји само један фактор пригушења, $\gamma(0)$, и њему придружен оператор $O(0) \equiv \frac{I+Z}{4}$.

Тако се одмах може писати ЛМЈ за разматрани модел (h=0):

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \gamma(0)\left(O_1 \otimes I_2 \rho O_1 \otimes I_2 - \frac{1}{2}\{O_1^2 \otimes I_2, \rho\} + I_1 \otimes O_2 \rho I_1 \otimes O_2 - \frac{1}{2}\{I_1 \otimes O_2^2, \rho\}\right). \qquad (4.34б)$$

Како се ради о 4-димензионалном простору, решавање (4.34б) се може обавити на уобичајени начин – израчунавањем матричних елемената:

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = \langle i|\left(-i[H,\rho] + \gamma(0)\left(O_1 \otimes I_2 \rho O_1 \otimes I_2 - \frac{1}{2}\{O_1^2 \otimes I_2, \rho\} + I_1 \otimes O_2 \rho I_1 \otimes O_2 - \frac{1}{2}\{I_1 \otimes O_2^2, \rho\}\right)\right)|j\rangle, \qquad (4.34в)$$

за базис изграђен од својствених базиса опсервабле Z за два кубита: $|1\rangle \equiv |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |2\rangle \equiv |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |3\rangle \equiv |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |4\rangle \equiv |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$.

Лако следе једначине за матричне елементе:

$$\dot{\rho}_{11} = 0,$$

$$\dot{\rho}_{12} = iJ\rho_{13} - \frac{1}{8}(\gamma + 8i\varepsilon_2)\rho_{12},$$

$$\dot{\rho}_{13} = iJ\rho_{12} - \frac{1}{8}(\gamma + 8i\varepsilon_1)\rho_{13},$$

$$\dot{\rho}_{14} = -\frac{1}{4}\left(\gamma + 4i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right)\rho_{14},$$

$$\dot{\rho}_{22} = iJ(\rho_{23} - \rho_{32}),$$

$$\dot{\rho}_{23} = \frac{i}{4}(4J(\rho_{22} - \rho_{33}) + (i\gamma - 4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))\rho_{23}),$$

$$\dot{\rho}_{24} = -iJ\rho_{34} - \frac{1}{8}(\gamma + 8i\varepsilon_1)\rho_{24},$$

$$\dot{\rho}_{33} = -iJ(\rho_{23} - \rho_{32}),$$

$$\dot{\rho}_{34} = -iJ\rho_{24} - \tfrac{1}{8}(\gamma + 8i\varepsilon_2)\rho_{34},$$

$$\dot{\rho}_{44} = 0\,. \qquad (4.34в)$$

Уводећи реалне и имагинарне чланове матричних елемената, $\rho_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$, и формално урачунавајући β_{22} и β_{33}, добија се систем од 18 једначина чија матрица гласи:

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\gamma}{8} & \epsilon_2 & 0 & -J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\epsilon_2 & -\frac{\gamma}{8} & J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -J & -\frac{\gamma}{8} & \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & J & 0 & -\epsilon_1 & -\frac{\gamma}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{4} & \epsilon_1 + \epsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_1 - \epsilon_2 & -\frac{\gamma}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{4} & \epsilon_1 - \epsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J & J & -\epsilon_1 + \epsilon_2 & -\frac{\gamma}{4} & 0 & 0 & -J & -J & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{8} & \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 & J & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_1 & -\frac{\gamma}{8} & 0 & 0 & -J & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_2 & -\frac{\gamma}{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

За задато почетно стање $\rho(0)$, коначно стање у неком тренутку t следи из израза:

$$\rho(t) = e^{At}\rho(0).$$

Општи резултат је постојање стационарних стања за Блохове векторе, $\vec{m} = \{0{,}0,\pm 1\} = \vec{n}$, за све комбинације вредности. Та стања су истовремено и асимптотска стања за комбинације $(m_z = \pm 1 = n_z)$, али за комбинације $(m_z = \pm 1 = \mp n_z)$ се добија јединствено асимптотско стање:

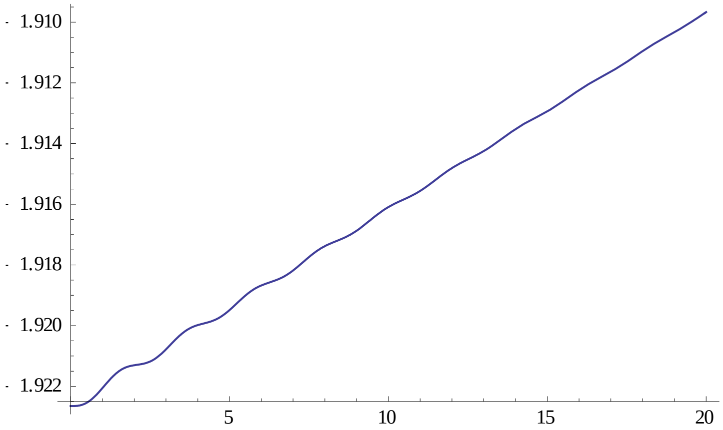
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0. & 0 \\ 0 & 0. & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.34г)$$

Такође, општи резултат је да се за резонантне кубите ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), укупна енергија не мења са временом. Свуда је начињен избор: $\gamma = 0.5, J = 0.1$.

(а) за $\varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 2$, асимптотско стање (приближно) гласи:

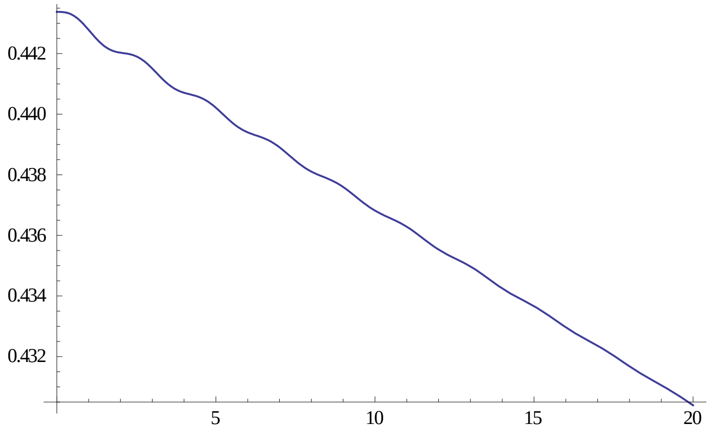
$$\rho_{\text{asymp}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.394 & 0. & -0.044 + i \\ 0 & 0. & 0.394 & 0.032 - i \\ 0 & -0.044 - i & 0.032 + i & \frac{1}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right) \end{pmatrix}. \qquad (4.34д)$$

Временска промена средње енергије два кубита је дата Сликом 4.8.



Слика 4.8 Средња енергија $tr(H\rho(t))$, случај (а), $t \in [0,20]$. Асимптотска вредност, приближно, износи: $tr\left(H\rho_{\text{asymp}}\right) = -0.74$.

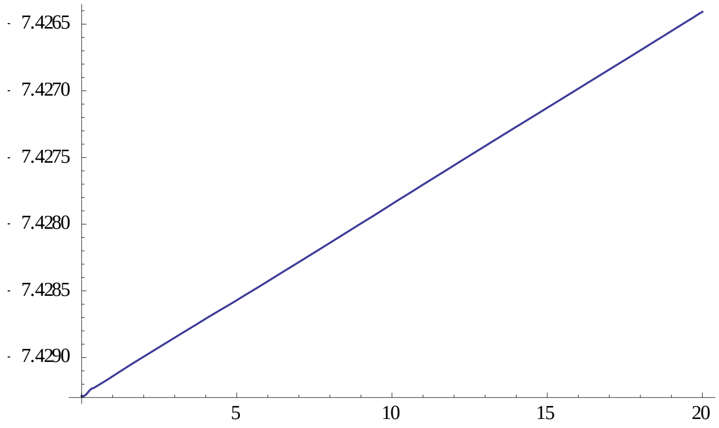
(б) за $\varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 2$, (приближно) асимптотско стање је дато изразом (4.34д). Временска промена средње енергије два кубита представљена је Сликом 4.9.



Слика 4.9 Средња енергија $tr(H\rho(t))$, случај (б), $t \in [0,20]$. Асимптотска вредност, приближно, износи: $tr\left(H\rho_{\mathrm{asymp}}\right) = -0.74$.

Из приложених резултата се види да процес нема јединствено стационарно стање, а уочена стационарна стања нису и асимптотска. При томе, асимптотско стање, као и временско понашање средње енергије пара интерагујућих кубита, је врло осетљиво на однос својствених енергија сопствених хамилтонијана два кубита, као и на почетно стање. Читаоцу се оставља да потврди следеће резултате за случај (в) $\vec{m} = \left(2^{-1/2}, 0, 2^{-1/2}\right), \vec{n} = \{0,0,-1\}$:

$$\rho_{asymp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.427 & 0. & 0. \\ 0 & 0. & 0.427 & 0. \\ 0 & 0. & 0. & \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right) \end{pmatrix},$$



Слика 4.10 Средња енергија $tr(H\rho(t))$, случај (в), $t \in [0,20]$. Асимптотска вредност, приближно, износи: $tr\left(H\rho_{\mathrm{asymp}}\right) = -1.606$.

4.35 За модел пара кубита уведен у Задатку 4.33 наћи услове под којима би могла важити стационарност Гибсовог топлотно равнотежног стања, $\rho_{th} = e^{-\beta H}/tr(e^{-\beta H})$. Поновити исти поступак и за „локалну“ мастер једначину уведену у претходном задатку.

Решење: Стационарност стања под неким процесом значи да динамичко пресликавање за тај процес, $\mathcal{G}(t, t_0)$, задовољава $\mathcal{G}(t, t_0)[\rho(t_0)] = \rho(t_0)$, еквивалентно, $\mathcal{L}[\rho(t)] = 0$. Како су нам познате мастер једначине, ми ћемо се држати друге једнакости.

За модел Задатка 4.33 користићемо „глобалну“ мастер једначину (4.33в,д):

$$\mathcal{L}[\rho] = -i[H, \rho] + 2\gamma(\omega)\left(A_1\rho A_1^{\dagger} - \frac{1}{2}\{A_1^{\dagger}A_1, \rho\}\right) + 2\gamma(-\omega)\left(A_1^{\dagger}\rho A_1 - \frac{1}{2}\{A_1A_1^{\dagger}, \rho\}\right) + \gamma(0)\left(A_3\rho A_3 - \frac{1}{2}\{A_3^2, \rho\} + A_4\rho A_4 - \frac{1}{2}\{A_4^2, \rho\}\right), \qquad (4.35а)$$

користећи тамо дате матричне репрезентације оператора $A_i, i = 1,3,4$. Једноставности ради, ставимо ознаке: $\gamma(\omega) \equiv \gamma_1, \gamma(-\omega) \equiv \gamma_2, \gamma(0) \equiv \gamma_3$.

По дефиницији ρ_{th} очигледно је комутатор у (4.35а) једнак нули, те остаје да се израчуна:

$$\mathcal{D}[\rho_{th}] = 2\gamma_1\left(A_1\rho_{th}A_1^{\dagger} - \frac{1}{2}\{A_1^{\dagger}A_1, \rho_{th}\}\right) + 2\gamma_2\left(A_1^{\dagger}\rho_{th}A_1 - \frac{1}{2}\{A_1A_1^{\dagger}, \rho_{th}\}\right) + \gamma_3\left(A_3\rho_{th}A_3 - \frac{1}{2}\{A_3^2, \rho_{th}\} + A_4\rho_{th}A_4 - \frac{1}{2}\{A_4^2, \rho_{th}\}\right). \qquad (4.35б)$$

Користећи ознаке Задатка 4.33, спектрална форма Гибсовог канонског стања гласи (подразумевајући нормализацију стања): $\rho_{th} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} e^{-\beta E_i}} \sum_{i=1}^{4} e^{-\beta E_i} P_i$, а матричне репрезентације оператора, преузете из Задатка 4.33, гласе:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J^2}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & -\frac{J\left(\epsilon_1+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}-\epsilon_2\right)}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0 \\ 0 & \frac{J\left(-\epsilon_1+\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}+\epsilon_2\right)}{4(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & -\frac{J^2}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & \frac{J(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0\\ 0 & \frac{J(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & \frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\mathrm{A}_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & \frac{J(-\epsilon_1+\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & 0\\ 0 & \frac{J(-\epsilon_1+\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)} & \frac{1}{2}-\frac{J^2}{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Смењујући ове матричне изразе, као и матричне репрезентације за пројекторе P_i из Задатка 4.33 (што је преобимно за непосредно матрично представљање), десна страна израза (4.35б) је сразмерна матрици:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}J^2\left(e^{\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}\gamma_1-\gamma_2\right)(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}J^3\left(e^{\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}\gamma_1-\gamma_2\right)}{(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)^{\frac{3}{2}}} & 0\\ 0 & \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}J^3\left(e^{\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}\gamma_1-\gamma_2\right)}{(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}J^2\left(e^{\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}\gamma_1-\gamma_2\right)(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2(4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2)^{\frac{3}{2}}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(4.35в)

Из (4.35в) је вероватно очигледно да једини услов да матрица постане нулта матрица, тј., да канонско стање буде стационарно за процес, гласи:

$$\gamma_2=\ e^{\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}}\gamma_1. \tag{4.35г}$$

Враћајући изнад уведене ознаке, као и користећи изразе уа сопствене енергије хамилтонијана из Задатка 4.33, овај услов гласи: $\gamma\big(-(E_3-E_4)\big)=e^{-\beta(-(E_4-E_3))}\gamma(E_3-E_4)$, што у скраћеном облику, $\gamma(-\omega)=e^{-\beta\omega}\gamma(\omega)$, представља један пример познатог, тзв., Кубо-Мартин-Швингеров (КМШ) услова за факторе пригушења Марковљевих процеса [2,4]. То јест, важење КМШ услова води закључку да разматрана глобална мастер једначина има топлотно канонско (Гибсово канонско) стање као стационарно стање.

Спроведимо сада исти поступак за „локалну“ мастер једначину (4.34б). Као и за глобалну, тако и за локалну мастер једначину комутатори су једнаки нула за канонско равнотежно стање. Тако за локалну мастер једначину преостаје испитивање под којим условима би дисипаторски део (4.34б) могао бити једнак нули (тј., нултој матрици)-

Потпуности ради, запишимо дисипаторски део (4.34б) у поједностављеном облику:

$$\mathcal{D}[\rho_{th}] = \gamma(0)\left(L_1\rho_{th}L_1 - \frac{1}{2}\{L_1^2, \rho_{th}\} + L_2\rho_{th}L_2 - \frac{1}{2}\{L_2^2, \rho_{th}\}\right), \qquad \text{(4.35д)}$$

где су уведене скраћене ознаке: .$L_1 = O_1 \otimes I_2$, $L_2 = I_1 \otimes O_2$ и које у матричној репрезентацији одабраној у Задатку 4.33 гласе:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сада се лако добија десна страна (4.35д) је сразмерна матрици:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J\gamma\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}\right]}{2\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{J\gamma\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}\right]}{2\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(3.45ђ)}$$

која ни под којим физички разумним условима не може постати нулта матрица; услов $J = 0$ одговара неинтерагујућим кубитима, када „локална“ мастер једначина постаје „глобална“, те овде није од интереса. То јест, само за $\frac{\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}\beta\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}\right]}{2\sqrt{4J^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2}} = 0$ се добија тражени резултат, али то може да одговара лимесу бесконачно високе температуре, то јест, лимесу $\beta = 1/k_BT \to 0$, или $4J^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 \to \infty$; оба услова су физички бесмислена. Тако закључујемо да (практично) ни под једним условом „локална“ мастер једначина разматраног процеса на може имати Гибсово канонско (равнотежно) стање као стационарно.

Алтернативни садржај:

Задаци би могли бити и овако груписани (уз неизбежно понављање задатака у различитим поглављима), без задатака који су већ препознати као математички увод, глава II збирке, као и неких задатака општег типа. Ниже дати редослед поглавља је азбучни.

1) Атом у ЕМ пољу: 3.9-3.15,3.17,3.26,3.27,3.31,3.33,4.1-4.4,4.6-4.10,4.12,4.13,4.16,4.26,4.27
2) Декохеренција: 1.13-1.17,3.18-3.20,3.32
3) Квантно мерење: 1.4,1.7-1.10,1.12,1.18,1.19,2.21,3.10,3.20,4.14-4.16
4) Марковљеви процеси: 3.21,3.35,4.3,4.7-4.9,4.11,4.12,4.25,4.26
5) Немарковљеви процеси: 3.27,4.12,4.17-4.23,4.25,4.26
6) Сложени (вишеделни) системи: 1.18,1.19,3.10,3.12-3.16,4.7,4.9,4.12-4.16 слика 35